

国际电气工程先进技术译丛

WILEY

切削振动和加工不稳定性控制：精密微纳加工的时频分析方法

Control of Cutting Vibration and Machining Instability A Time-Frequency Approach for Precision, Micro and Nano Machining

[美] C. 史蒂夫·苏（C. Steve Suh）
刘孟坤（Meng-Kun Liu） 著

郭新华 译







机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国际电气工程先进技术译丛

切削振动和加工不稳定性控制：精密微纳加工的时频分析方法

Control of Cutting Vibration and Machining Instability
A Time-Frequency Approach for Precision, Micro and Nano Machining

[美] C. 史蒂夫·苏（C. Steve Suh）
刘孟坤（Meng-Kun Liu） 著
郭新华 译



机 械 工 业 出 版 社

北京市版权局著作权合同登记　图字：01-2014-5110 号

图书在版编目（CIP）数据

切削振动和加工不稳定性控制：精密微纳加工的时频分析方法/（美）苏（Suh，C. S.），刘孟坤著；郭新华译．—北京：机械工业出版社，2015.7

（国际电气工程先进技术译丛）

书名原文：CONTROL OF CUTTING VIBRATION AND MACHINING INSTABILITY

ISBN 978-7-111-51148-9

Ⅰ．①切…　Ⅱ．①苏…　②刘…　③郭…　Ⅲ．①精密切削－切削振动－振动控制　Ⅳ．①TG506

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 196755 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：张俊红　责任编辑：闾洪庆

版式设计：赵颖喆　责任校对：刘雅娜

封面设计：马精明　责任印制：李　洋

三河市宏达印刷有限公司印刷

2015 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 14 印张 · 312 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-51148-9

定价：59.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线：010-88361066

读者购书热线：010-68326294

010-88379203

网络服务

机工官网：www.cmpbook.com

机工官博：weibo.com/cmp1952

金书网：www.golden-book.com

教育服务网：www.cmpedu.com

精密微纳加工是一门多学科综合的高级技术，要求具有高精度、高稳定性和高自动化。在精密加工制造过程中，切削的不稳定性控制和发展无颤振机床是两个重要的内容。

本书介绍了切削动力学和不稳定加工的主要特点，引入了切削振动和加工不稳定控制应用到的基本物理原理，在此基础上重点介绍了自适应滤波器和滤波-x LMS 算法、时频分析方法、小波滤波器组原理和应用、动态不稳定性的暂态特性和频谱特性、动态不稳定性的同步时频域控制、高速下不稳定铣削和振动的时频控制、不稳定微铣削的多维时频控制以及摩擦诱发的不稳定性的时频控制和同步时频域内的混沌同步等内容。

本书将精密加工技术与系统论、方法论、计算机技术、信息技术、传感器技术、数字控制技术相结合，形成了精密微纳加工中切削振动和加工不稳定的创新型控制算法，相应结果通过 MATLAB 语言和 Simulink 仿真工具进行验证，可以使读者快速了解和掌握。

本书目标读者群体广泛，适合机械制造及其自动化、控制理论与控制工程、电气工程等专业的研究生阅读参考，特别适合从事精密微纳加工的工程专业人士阅读使用，对于从事非线性动力学和非线性控制领域的专业研究人士也具有重要的参考价值。

译 者 序

精密微纳加工是一门多学科综合的高级技术，要求具有高精度、高稳定性和高自动化。随着精密加工、数字控制等领域的迅速发展，精密加工技术与系统论、方法论、计算机技术、信息技术、传感器技术、数字控制技术的结合，促成了精密加工系统工程的形成。由于生产的迫切需求，精密加工技术不断发展和进步，成为当今热门的研究领域。在精密加工制造过程中，切削的不稳定性控制和发展无颤振机床是两个重要的内容。时频分析作为分析时变非稳定系统的有力工具，成为现代信号处理研究的一个热点，它作为一种新兴的信号处理方法，近年来受到人们的广泛关注。

本书在探讨切削动力学的基础上建立和发展了创新型的控制方法。研究耦合、交互和不同切削状态的演化，得出用来消除加工不稳定性和实现精密微纳米制造的机床设计的可控临界参数，总结出切削不稳定性鲁棒控制的主要特点。

本书紧接着从基础的物理原理出发，介绍了有源滤波控制和滤波-x LMS 算法，详细地介绍了几种非线性系统响应特性的分析方法及非线性时频域控制的基本原理和特性。在此基础上引入了小波滤波器组和时频域分辨率的概念，详细阐述了基于非线性时频域控制的基本原理。

本书针对基于频域和时域的控制器都无法解决的非周期响应和线路混沌问题，引入了时频域控制理论以及使混沌控制可行的控制器，应用高速制造和由摩擦引发的不连续的实例证明其可行性。

本书最后应用联合时频域中施加并行控制的概念设计了一种混沌同步方案，其使用时频域控制法来缓解混沌，强调了在混沌同步中实现抑制自持的混沌加工颤振的意义。

本书内容丰富、实用性强。本书以精密微纳加工这一热门领域为基础，指出了精密微纳加工过程中存在的切削振动和不稳定性问题，并利用基于小波变换的非线性时频域控制法、混沌控制和混沌同步控制方法，理论基础翔实、应用实例丰富，系统而全面地阐述了切削振动和加工不稳定的控制方案可行性。

全书译稿由华侨大学郭新华副教授完成。翻译过程中得到以下学生的帮助，

包括研究生张莹文、吴燕峰、薛娴、黄燕涛，以及本科生刘梦蝶、张昱芃。在本书译稿完成之际，对她们所做的工作表示感谢。

本书涉及的学科知识面广，翻译难度较大。尽管译者始终谨慎动笔，仔细校译，但难免还会存在疏漏，恳请读者批评指正。

译者　郭新华

原书前言

控制器一般在频域或时域下进行设计。当控制器在频域下进行设计时，其共同点是由相应的运动控制方程推导出传递函数。频率响应的设计方法，如波特图、根轨迹，通常用于基于频域设计的控制器。当控制器在时域下设计时，系统的微分方程根据相关联的状态变量被描述为状态空间模型。然后利用状态反馈或者其他时域控制规律研究所设计控制器的可控性和可观性。控制器的设计在任一域内都有自己的优势。频域设计的控制器可以提供不确定性性能。对于线性稳定的系统，设计一个反馈控制器，评估正弦输入时的输出幅值和相位响应一般是足够的。时域设计的控制器在不考虑频域上的要求时，可以适应多输入/输出及其对应的内部与外部状态。时域控制器和频域控制器只能单独地应用在线性稳定系统中。

对于一个线性时不变系统，仅系统输入的幅值和相位角发生改变，当输入频率与输出频率保持不变时，系统可以通过施加适当的反馈增益来保持稳定。而且，时域响应和频域响应应该同时有界。然而，上述条件在非线性系统中的混沌响应是不成立的。在时域中，混沌响应本是有界的，而在频域中成为不稳定的带宽，且这个频域在相图中含有无限多个各时期的不稳定周期轨道，被称为奇怪吸引子。它不保持在一个周期轨道内，且在这些不稳定的周期轨道间快速切换。如果混沌响应投影到 Poincaré 截面，将得到一个低维子空间的横向响应的轨迹，众多的交叉点会密集地聚集并限制在一个有限的区域内。这意味着混沌响应在时域中的特定范围内是有界的，在动态恶化的同时，变化的带宽频谱轨迹在无数个不稳定周期轨道内快速切换。这种现象多见于高速切削操作，其强非线性包括再生效应、摩擦的不连续性、切屑形成和刀具刚度，且为主导作用。

对于一个非线性、非稳定的系统，当它发生分叉直至最终混沌时，其响应时间不再是周期的。额外频率分量的带宽光谱响应作为结果出现。设计在时域中的控制器包含时域误差是无法克制不断增长的带宽。另外，设计在频域中的控制器限制带宽扩展，而在时域误差中失控。无论基于频域还是时域的控制器都不足以解决非周期响应和线路混沌。这由不确定性原则推断进一步指出，在时域和频域的分辨率不能任意达到。然而，根据 Parseval 原理，在时域和频域中计算的能量是可以互换的，它可以一起纳入并满足时域和频域的要求，并实现具有可调和并发时间-频率分辨率的非线性的控制。

以上是我们意识里一个简要的版本，很多年前我们就考虑了以下两个问题：

①为什么动态响应在时域中是有界的，却在同一时刻的频域中成为不稳定带宽？②为什么控制一个非线性系统必须同时在时域及频域中执行是可行有效的？在本书中记录的基于小波变换的时频域控制方法是我们对这些问题的具体解答。

控制方法是自适应的，也就是说它监控并实时调整以提高其性能。新型控制中的对象参数需根据不断变化的系统输出进行实时辨识，并调整和更新控制规律。其结构体系的灵感来自于有源噪声控制中FIR滤波器识别系统和自动可调的FIR滤波器拒绝不可控输入。分析小波滤波器组被纳入控制系统。在控制信号合成之前，分析滤波器组分解输入和错误信号。当通过离散小波变换成对应于连续倍频程的各种尺度分量来解决一种动态响应，控制规律本质上是建立在联合的时频域内，从而方便时频的同步控制。不像有源噪声控制，其目的是减少噪声。当系统发生分叉或者混沌运动时，基于小波变换的时频控制是为了尽量减少在时频域内恶化的输出信号以便尽快恢复输出响应的周期性。这些特点一起为非线性、非稳定系统响应的控制提供了前所未有的优势。

本书提供了一个良好实践和训练基础，工程专业人士都可通过严格的探索在微制造、精密机床设计以及振动控制中实现重要的突破。根据高速不稳定切削控制和开发无颤振机床概念形成可行的解决方案。非线性动力学和非线性控制领域的专业研究人士也会发现大量如何充分缓解不连续性和混沌度的定性及定量的条款信息。

本书内容由11章组成。为了更好地理解不稳定性和车削工序颤振，第1章阐述了刀具工件的互动耦合性；第2章简要回顾了数学基础知识，同时包含第7章中有关于基于小波变换的非线性时频域控制法则推导的常见符号；第3章阐述了有源噪声控制和滤波-x LMS算法的主要内容，在时频控制中，其功能是系统识别和减少错误；在第4章中探讨了时频域分析的概念，其中介绍了几种分析非线性系统适当表征的重要工具，这为理解小波滤波器组和第5章中的时频域分辨率的概念奠定了基础；第6章更详细地阐述了基于非线性时频域控制的基本原理；第7章介绍了时频域控制理论及使混沌控制可行的所有突出的物理特性；在第8~11章中，应用高速制造和由摩擦引发的不连续的例子证明其可行性；在最后一章即第11章中，探讨了另一种使用时频域控制法来缓解混沌的方案，强调了在混沌同步中实现抑制自持的混沌加工颤振的意义。

附录中列出了第10章和第11章中所有的结果和数据的两个MATLAB运行的m文件。一个是第10章中，摩擦引起的不稳定控制有一个广泛的有限元编码单元，其利用了几个用户定义的MATLAB函数在Simulink中计算梁的振动。在实施基于小波变换的非线性时频域控制法时，希望这些例子可以对实践经验的获得有所帮助。相当熟悉MATLAB语言和Simulink仿真工具的读者应该会发现其中的实例是丰富的、完整的及易于遵循的。

时域与频域控制首次设想于多年之前，当时众多才华横溢的人都致力于发展

其核心控制理念。在他们之中，如 Baozhong Yang 是探讨将瞬时频率作为非线性系统特征的首选工具；Achala Dassanayake 为我们全面展示了什么是不稳定的加工和加工颤振。

C. Steve Suh 和 Meng-Kun Liu
于美国得克萨斯州农工大学

目　录

第 1 章　切削动力学和不稳定加工

材料切除加工（作为制造业最重要的工序）正面临着不断增长的挑战：提高高速制造在微纳米层次上的能力。亚微米级三维外形和自由曲面的加工要求在准确度、精密度和生产率方面达到前所未有的性能。然而，能否满足显著提高质量和效率的要求，要视进行机械加工的机床的优化设计而定。现代精密机床的结构一般是几个基本部件的集成，包括过程检测和控制、电源和驱动器、模具和夹具以及提供刚度和稳定性的构架。由于动态不稳定性本来就显著，且其在高速精密切削中的危害尤其严重，故在设计精密机床系统中动力学设计受到青睐[1]。该方法采用计算机为基础的分析和设计工具来优化系统级别机床设计的动态性能。它很大程度上依赖于一条重要信息——机床的振动。由于有大量参数影响切削振动，如修复效果、刀具非线性特性、切削间歇性、间断的摩擦激励和环境噪声等，故该方法的有效性要求加工动力学的全面建立贯穿整个过程。

本书探讨了以切削动力学为基础，建立和发展创新型控制方法。研究耦合、交互和不同切削状态的演化，以便确定机床设计的可控基本临界参数，这一参数可用来消除加工不稳定性和实现更好的精密微纳米制造。

有助于切削不稳定性鲁棒控制的主要特点是

1）对切削运动中切削和干扰的动力学规律的理解。

2）在各种工况下机床系统以最小的振动运转，如高速运转以实现加工表面的优质抛光。

3）提高生产率，以实现利润最大化及运营和维护成本最小化。

4）关注明显的不连续性，这种不连续性可让复杂的机床系统运动的性质得以全面确立，用以减少复杂间歇切削的同步时频非线性控制的应用既新颖又独特。对材料切除过程的影响减缓了由摩擦和刀具非线性引起的切削不稳定和混沌运动。

5）关于切削不稳定控制和适用于高速切削加工过程的机床设计的概念的发展。

1.1　车削工序的不稳定

这里以关于加工不稳定性的一个综合调查研究来展开本书，通过采用三维模型[2,3,4,5]解决问题：发展至今的切削动力学模型都未能掌握车削作业的动力学规律和应用模型建立的稳定性图不足以确定真正的稳定区域。研究的具体目标是正确地解释切削不稳定性，从而为切削不稳定性控制创建知识库。

复杂的加工模型描述了耦合的刀具-工件动力学，它受制于非线性再生切削力、瞬时切削深度和材料不平衡造成的工件旋转。在模型中，工件可视为一个三转子段的系统（未加工的、正在加工的和已加工成型的），它们通过一个柔性轴连接，于是使得工件相对于刀具运动且刀具相对于加工表面运动，从而组成三维，建立主轴转速、切削

深度、材料切除率和旋转的函数。图1.1所示为用于啮合被削减部分的刀具配置，质量中心到几何中心的偏差构成了描述工件旋转的离心率。可以观察到，利用模型中刀具和工件的一组丰富的非线性特性，包括在不同的切削深度下的倍周期分叉和表明加工不稳定性程度的混沌。结果显示与文献里记录的实际实验一致。结果表明至少在一定切削深度范围内，旋转是加工动力学基本特征中不容忽视的部分。与普遍观念相反的是，发现旋转对刀具运动有着微不足道的影响。记录在参考文献［2，3，4，5］中的研究也表明线性化车削模型低估了时域上的刀具振动，而高估了频域中的系统性能。然而非线性模型与文献记载的描述加工稳定性和振动的实际结果一致。非线性模型描述的耦合工件-刀具的振动在揭露真实的加工运行状态方面比对应的线性化更实用。在定性意义上，模型也揭示了与不稳定情形有关的刀具固有频率的宽带特性。然而，当在一定的切削深度（DOC）且无振荡中常见的随机性时，利用线性化模型得到的振动幅度处于发散中。此外，线性化模型认为在低切削深度时不稳定，且预测不稳定运动的分叉状态，运用物理参数，此不稳定运动被描述为混沌。基于这个模型能获得很多重要启示，事实上包括，如果要建立加工基础动力学且准确鉴定稳定极限，非线性模型的线性化是不可取的。

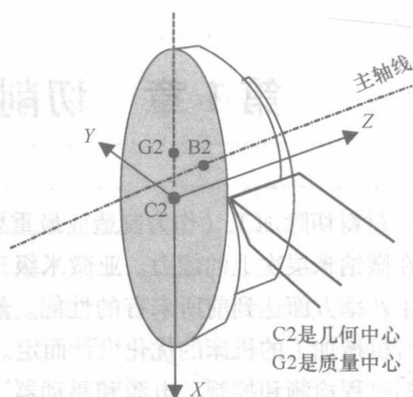


图1.1　正被加工部分的结构

下面介绍耦合回转和刀具几何参数对加工的影响。

影响材料去除率（MRR）和确定切削力度及其功率损耗的，除了速度、进给率和切削深度，刀具几何形状也是影响加工效率的重要参数之一。表面粗糙度、切屑形成的变化和流屑角也受到刀具几何形状的影响。尽管流屑角与刀具角有关，但流屑角只是切削深度的函数。图1.2给出了处在切削运行中的刀具前角，α的视图。刀具前角决定了最新形成的切屑流。通常那个角度在$-5°\sim+5°$之间。为了与参考文献［6］中发表的实验结果相比较，这里考虑一个恒定的主轴转速$\Omega=1250\mathrm{r/min}$、恒定的木屑宽度$t_0=0.0965\mathrm{mm}$、离心率$\varepsilon_1=0.2\mathrm{mm}$，与之一道的还有几个不同的切削深度，包括DOC＝1.62mm和2.49mm。工件是机械部分为一个0.25m长（l_0）、半径$r_3=20.095\mathrm{mm}$的4140型钢筋。硬质合金刀具的起始位置设置在离卡盘0.15m处。接下来给出的图里分为三类。首行绘出了其时间轨迹，而中间行给出利用瞬时频率得到的相应的时频响应（这部分将在第4章详细讨论）。末行展示了李雅普诺夫频谱，且展示了其中最大的李雅普诺夫指数。利用瞬时频率来理解加工不稳定性的细微的特征特性。

正倾角能使刀具锋利，但与负倾角相比，它也削弱了刀具。负倾角更适用于粗切削。刀具几何参数的选择取决于特定工件和刀具材料的选定。为了确立刀具角度确实对切削稳定性有显著影响，接下来利用两套刀具几何形状来测定切削力度。它们的值如表1.1所示。这两套都取自用于参考文献［6］中实验的刀具刀片。由于数值研究中

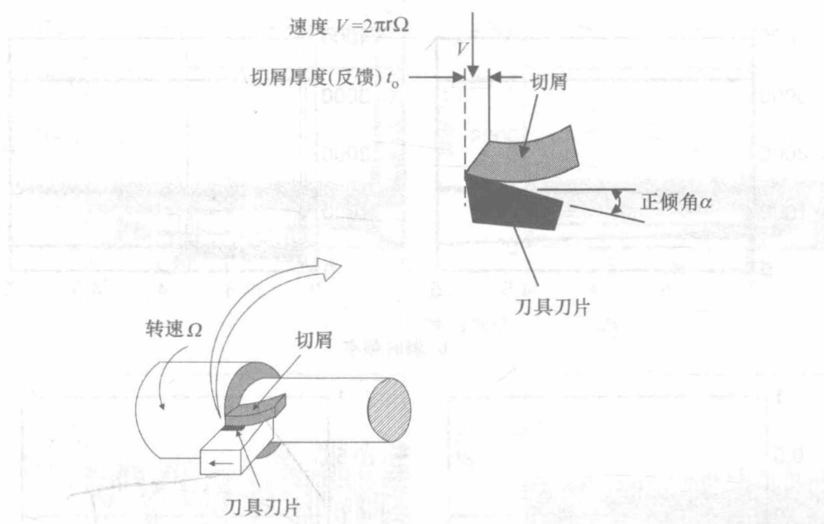


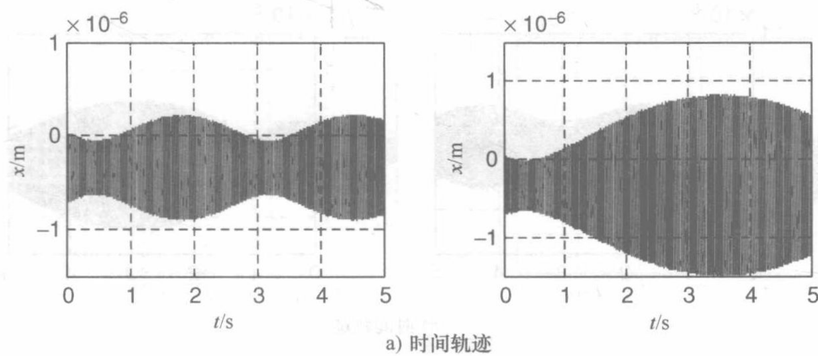
图 1.2　刀具前角的切削运动

考虑的切削深度小于 1mm，并且可被认为是非粗切削，故所有情况下都认为前角是正向的。注意：负倾角更适用于粗加工。本研究中运用了三个切削深度（0.9mm、0.75mm 和 0.5mm）和一个 1250r/min 的主轴转速及每转 0.0965mm 的进给。

表 1.1　刀具角度

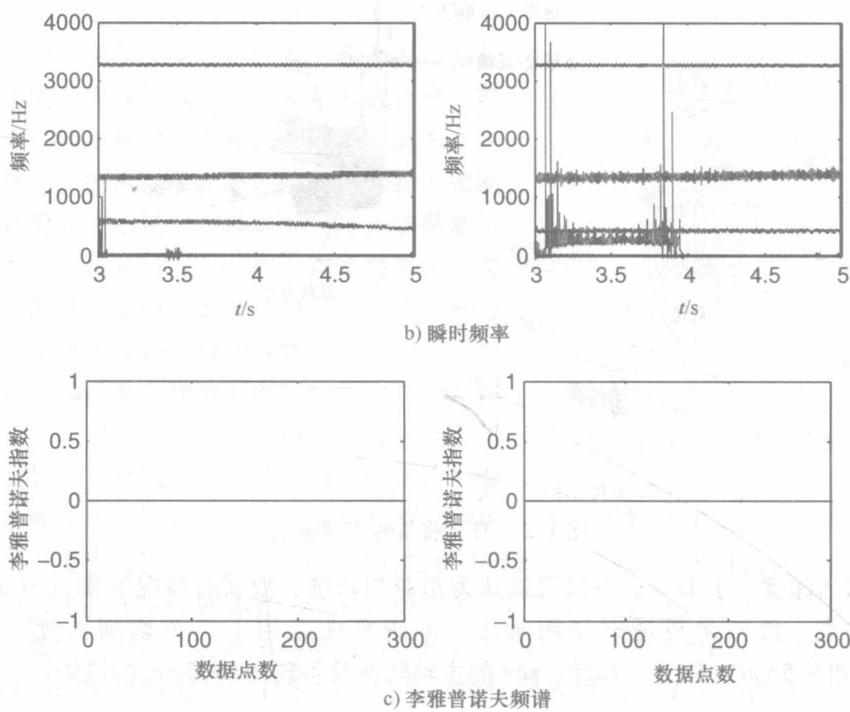
组数	侧切入角	前角	倾角
1	45°	3.55°	3.55°
2	15°	5°	0°

除了图 1.6 和图 1.7，图 1.3 ~ 图 1.8 都给出了时间响应、3 ~ 5s 的瞬时频率响应和相应的李雅普诺夫频谱。验证 x 轴方向的系统响应以演示工件的运行，分析 z 轴响应以研究刀具的运动。再看图 1.1 为被加工部分定义的坐标，在右半边的图对应于 1 号刀具的几何条件，左半边的图对应于 2 号刀具角。在图 1.3 中，2 号刀具几何形状的 x 轴方向振动的振幅是 1 号的两倍。然而，在工件的固有频率为 3270Hz 和旋转频率为 20.8Hz



a) 时间轨迹

图 1.3　当 DOC = 0.90mm 且 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）的 x 轴方向的时间响应，及对应的瞬时频率和李雅普诺夫频谱



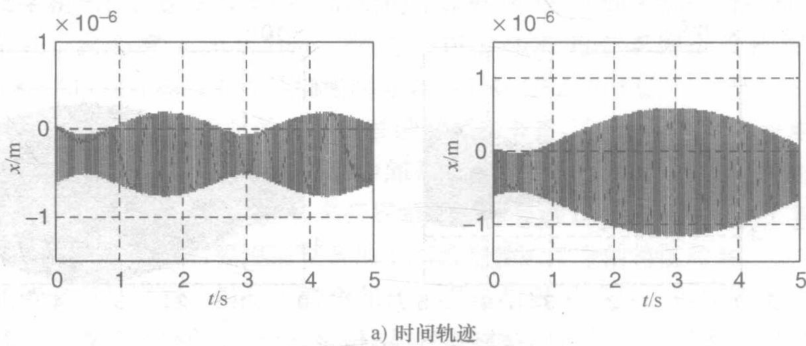
b) 瞬时频率

c) 李雅普诺夫频谱

图 1.3　当 DOC = 0.90mm 且 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）的 x 轴方向的时间响应，及对应的瞬时频率和李雅普诺夫频谱（续）

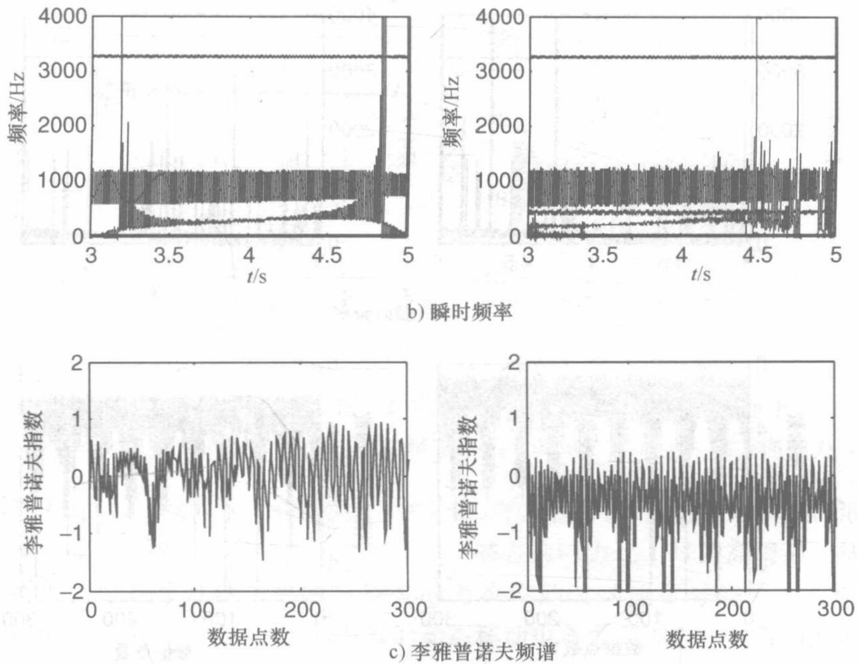
的情况下，它们的频域特性相似。2 号展示了另外两个频率，一个接近刀具固有频率即 425Hz，且另一个频率为 250Hz，它在 3.9s 后消失。1 号只有一个刀具激励频率。可以看到其频率在 2s 内从 580Hz 降到 460Hz，说明刀具几何形状是一个影响工件稳定性的不容忽视的参数。

如图 1.4 所示，当切削深度降至 0.75mm 时，振荡振幅上仍然存在差异。随着其直径的减小，工件固有频率减小到 3250Hz。当旋转频率保持不变时，一个 900Hz 的元件，



a) 时间轨迹

图 1.4　当 DOC = 0.75mm 且 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）的 x 轴方向的时间响应，及对应的瞬时频率和李雅普诺夫频谱

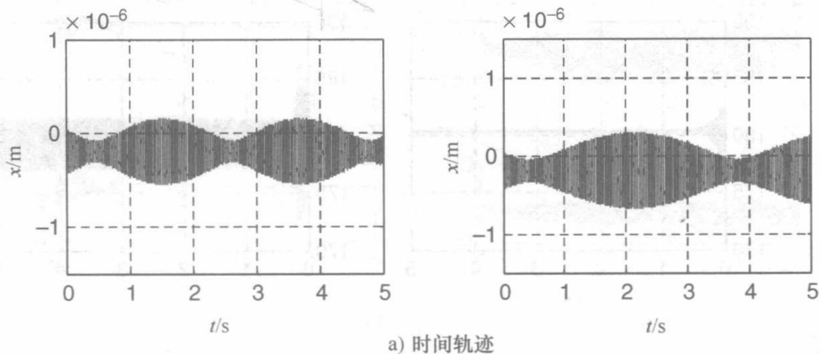


b) 瞬时频率

c) 李雅普诺夫频谱

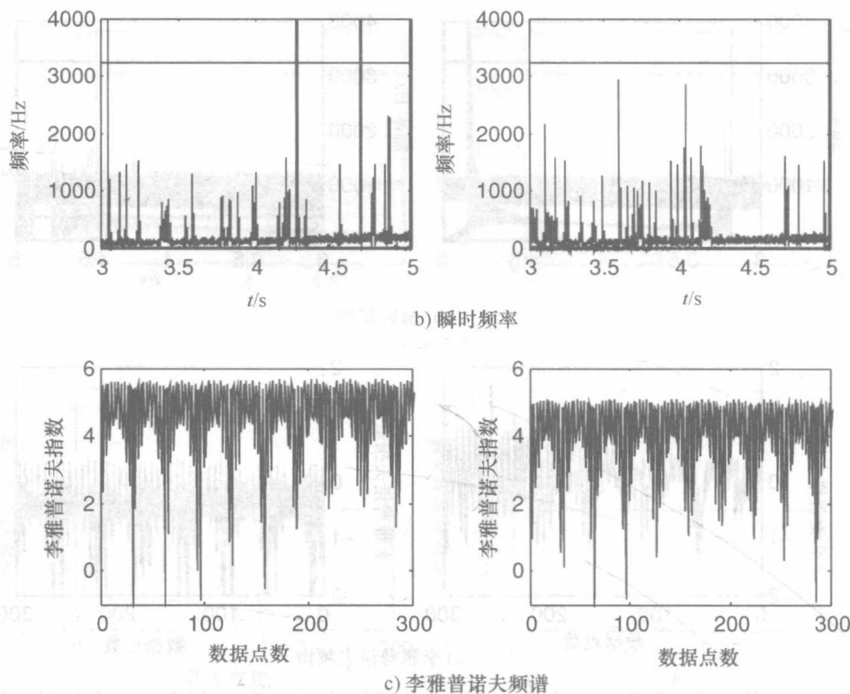
图 1.4　当 DOC = 0.75mm 且 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）的 x 轴方向的时间响应，及对应的瞬时频率和李雅普诺夫频谱（续）

其带宽为 500Hz，在两个系统中占主导地位。从 2 号可以看出，在 4.8s 之后固有频率为 425Hz 的刀具激励的分叉减弱了。另外，1 号却没有分叉。它有一个 250 ~ 400Hz 的频率分量的增加。此频率分量之后消失。两者的李雅普诺夫频谱都在 0 附近振荡，因此引发了这些系统是否精确地稳定的问题。图 1.5 中把切削深度进一步减小到 0.5mm，意味着两个系统展示了以正的李雅普诺夫指数为标志的一种不稳定的情况。图 1.6 中较大力的波动解释了从 2 号刀具几何形状中观察到的大振幅。大幅波动的力推动工件偏移更多。有趣的是，尽管刀具几何形状的变化会影响到切削力，但对于两套刀具几何形状，x 轴方向的力幅度几乎完全相同。



a) 时间轨迹

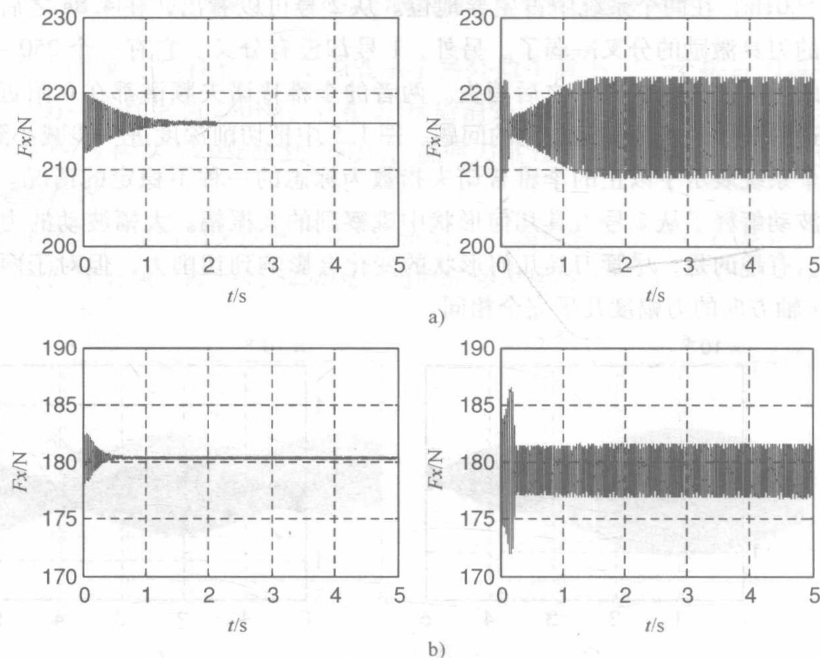
图 1.5　当 DOC = 0.50mm 且 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）的 x 轴方向的时间响应，及对应的瞬时频率和李雅普诺夫频谱



b) 瞬时频率

c) 李雅普诺夫频谱

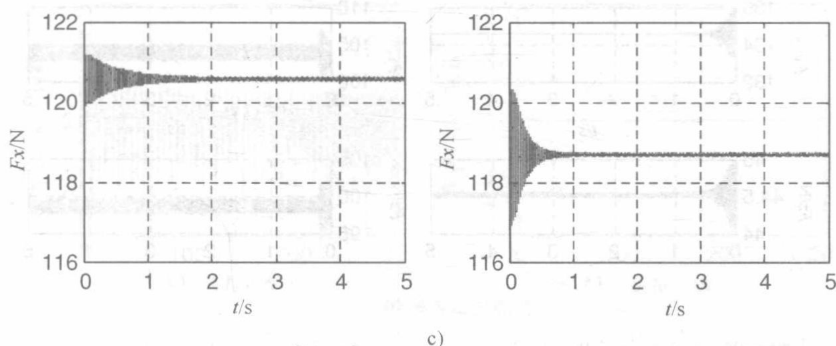
图 1.5　当 DOC = 0.50mm 且 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）的 x 轴方向的时间响应，及对应的瞬时频率和李雅普诺夫频谱（续）



a)

b)

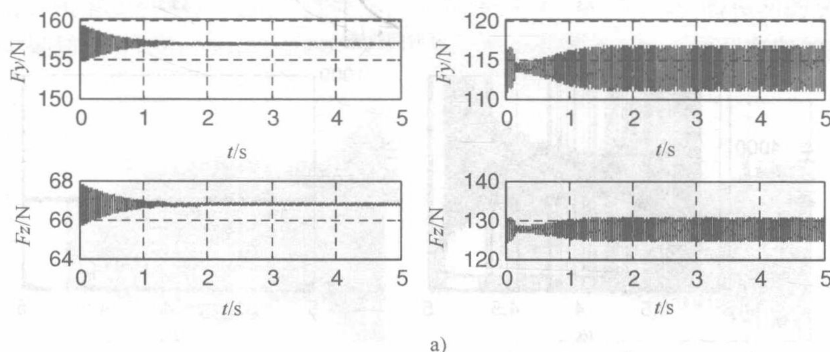
图 1.6　在 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）分别对应于 DOC = 0.90mm（a）、DOC = 0.75mm（b）和 DOC = 0.50mm（c）的 x 轴方向的力



c)

图 1.6　在 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）分别对应于 DOC = 0.90mm（a）、DOC = 0.75mm（b）和 DOC = 0.50mm（c）的 x 轴方向的力（续）

如图 1.7 所示，能够从 y 轴方向的力和 z 轴方向的力的分量看出刀具几何形状的影响。当 2 号 y 轴方向的力小于 1 号的时，2 号 z 轴方向的力比 1 号的高很多。从所有绘图中可以看出，与 1 号刀具几何形状相关的力响应的波动比 2 号的更小。切削深度 DOC = 0.9mm、0.75mm 和 0.5mm 的刀具的动态移动也考虑了进去。尽管力的波动和振动幅度都非常显著，但 2 号却相对更加稳定。在考虑的三个切削深度中，有两个的表现不同。这三种情况下，1 号的振动过程中其振幅是以纳米计量的。另外，当 DOC = 0.9mm 和 0.75mm 时，2 号以几微米的振幅振动，当 DOC = 0.5mm 时，振幅为几纳米。不同于 1 号，2 号所有的李雅普诺夫频谱都证明了动态响应能达到稳定状态。尽管其有正的李雅普诺夫指数，但 2 号在 DOC = 0.9mm 和 0.5mm 情况下表现出不稳定性。倘若图 1.8 中对应于 DOC = 0.9mm 的图证实了 1 号的响应是宽带的，且因此是不稳定的，那么 2 号就因带有匀称的频谱而稳定。虽然李雅普诺夫频谱显示在 DOC = 0.75mm 时 1 号刀具的运动处在稳定状态，但是相应的瞬时频率却表明不然。在 DOC = 0.5mm 时，2 号的瞬时频率绘图也与李雅普诺夫频谱相矛盾（未展示出）。对个别瞬时频率单分量详细审查，在 3240Hz 时显示频率有三次分叉。故它处在一个高分叉状态。



a)

图 1.7　在 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）分别对应于 DOC = 0.90mm（a）、DOC = 0.75mm（b）和 DOC = 0.50mm（c）的 y 轴方向和 z 轴方向的力

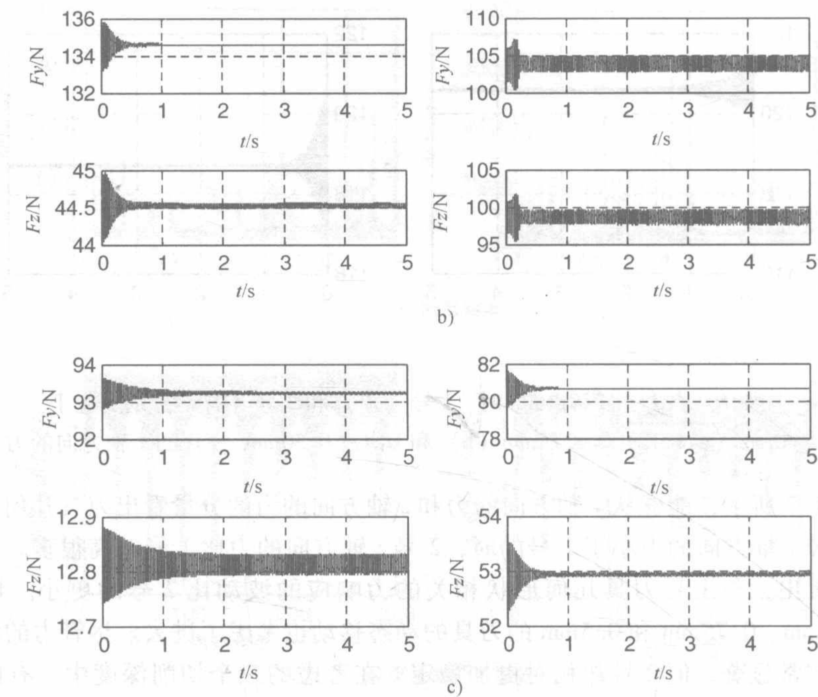


图 1.7 在 $\Omega = 1250\text{r/min}$ 时，1 号（左）和 2 号（右）分别对应于 DOC = 0.90mm（a）、DOC = 0.75mm（b）和 DOC = 0.50mm（c）的 y 轴方向和 z 轴方向的力（续）

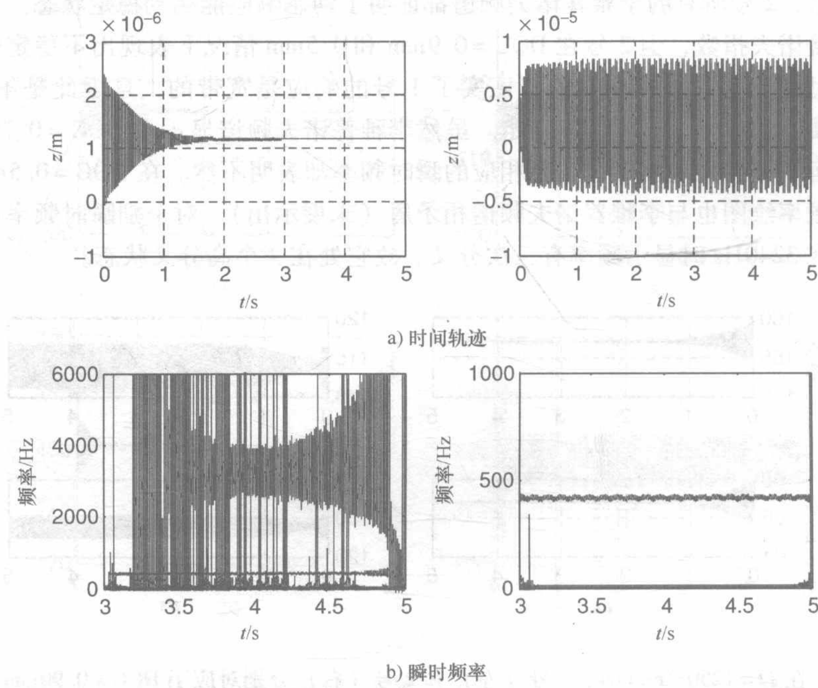
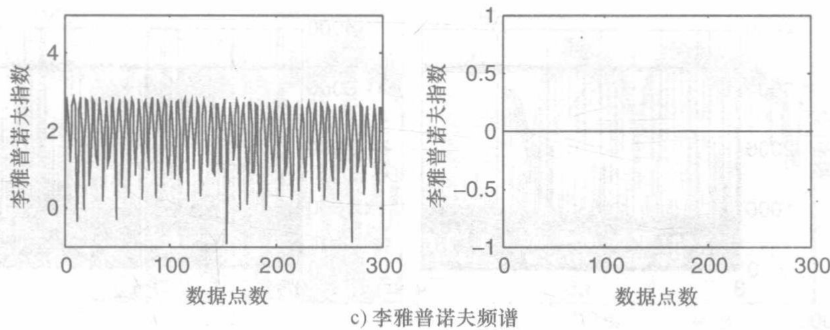


图 1.8 当 DOC = 0.90mm 且 $\Omega = 1250\text{r/min}$ 时，1 号（左）和 2 号（右）的 z 轴方向的时间响应（刀具振动），及对应的瞬时频率和李雅普诺夫频谱



c) 李雅普诺夫频谱

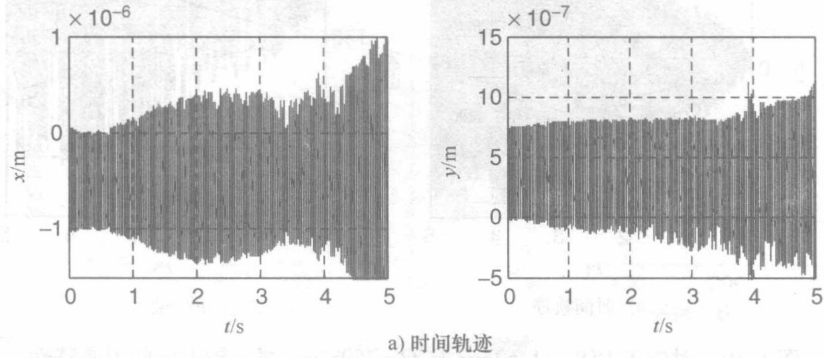
图 1.8　当 DOC = 0.90mm 且 Ω = 1250r/min 时，1 号（左）和 2 号（右）的 z 轴方向的时间响应（刀具振动），及对应的瞬时频率和李雅普诺夫频谱（续）

刀具几何参数对切削动力学的影响和对上述研究的表面精加工的影响形成了一些观念。长期以来，制造业学会运用复杂几何形状的刀具刀片来获得更好的产品表面抛光。然而，为理解加工动力学和切削稳定性而建立的绝大部分模型都忽略了刀具几何参数造成的各种影响。其原因之一为，事实上，对于合并各种本质上是三维的刀具角度而言，一维加工建模是不可行的。给出的实验数值表明忽略刀具几何形状是不大可能的。可以观察到刀具几何形状的变化会显著影响切削稳定性。对于某一个特定的切削深度，运用一套刀具几何形状时，加工过程会不稳定；在相同的切削深度下，通过精心选择具有不同的刀具几何形状的合适的刀具刀片，加工过程会变得稳定。这就提出一个问题：在不考虑刀具几何形状情况下，真正的动态稳定性能否被鉴定。因此，在建立三维车削作业模型时，刀具几何形状也应被考虑进去，这是至关重要的。

1.2　切削的稳定性

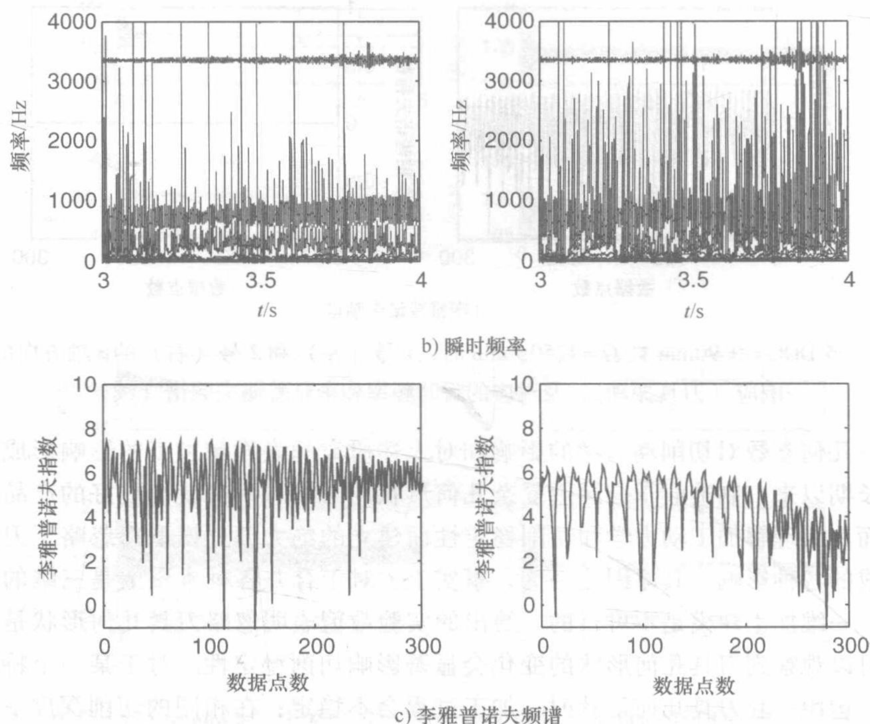
用四个不同的主轴转速和几个切削深度来模拟动态模型。这一部分展示的结果只对应于切削深度 DOC = 1.62mm 且切屑厚度为 0.0965mm 的情况。

紧接着，考虑工件和刀具的时间响应。对应于 DOC 为 1.62mm 的相同的切削深度，考虑两个主轴转速：750r/min 和 1000r/min。图 1.9 和图 1.10 中，所有方向的振动似乎



a) 时间轨迹

图 1.9　对应于 DOC = 1.62mm 且 Ω = 750r/min 的 x 轴（左）和 y 轴（右）方向的工件响应

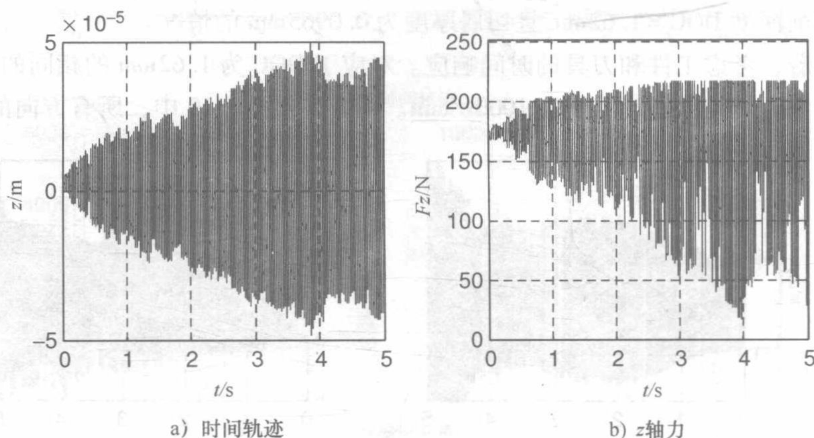


b) 瞬时频率

c) 李雅普诺夫频谱

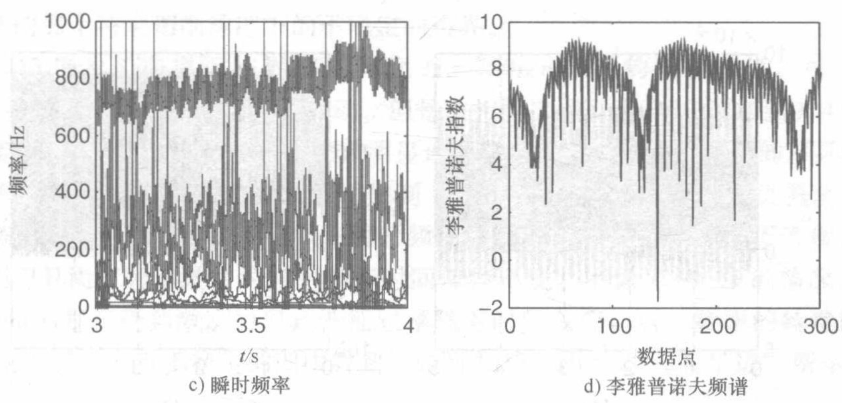
图 1.9　对应于 DOC = 1.62mm 且 Ω = 750r/min 的 x 轴（左）和 y 轴（右）方向的工件响应（续）

都是随机的，且正的李雅普诺夫频谱表明有混沌现象。伴随之的是宽带瞬时频率频谱。当速度提高到 1000r/min，从图 1.11 和图 1.12 可以看出，工件和刀具两者的响应都非常稳定。时间轨迹是周期性的且李雅普诺夫频谱是 0，这说明未来的振动是可预测的。此外，那些瞬时频率图只展示了三个不分叉的主要频率。这些频率是，工件固有频率 3343Hz、刀具固有频率 425Hz 和旋转频率 16.67Hz。



a) 时间轨迹　　b) z轴力

图 1.10　对应于 DOC = 1.62mm 且 Ω = 750r/min 的 z 轴方向的刀具特性



c) 瞬时频率 d) 李雅普诺夫频谱

图 1.10 对应于 DOC = 1.62mm 且 $\Omega = 750\mathrm{r/min}$ 的 z 轴方向的刀具特性（续）

a) 时间轨迹

b) 瞬时频率

c) 李雅普诺夫频谱

图 1.11 对应于 DOC = 1.62mm 且 $\Omega = 1000\mathrm{r/min}$ 的 x 轴（左）和 y 轴（右）方向的工件响应

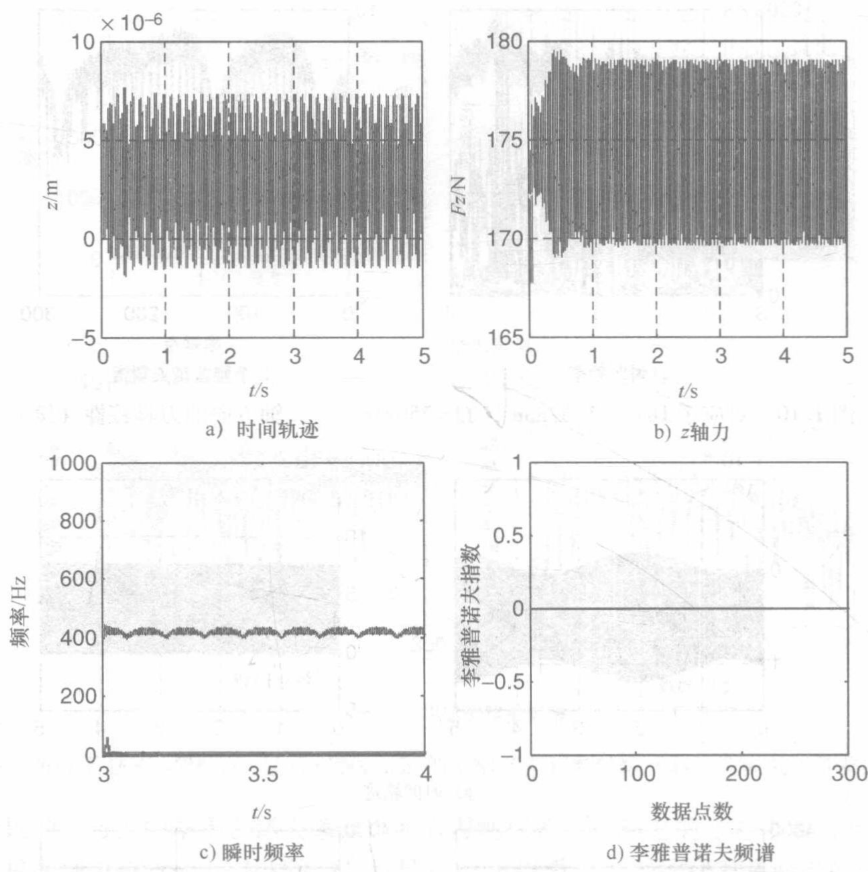


图 1.12　对应于 DOC = 1.62mm 且 Ω = 1000r/min 的 z 轴方向的刀具特性

尽管工件受到受制于切削力组件的刀具固有频率的激发，但是刀具却不受工件固有频率的影响。这些是关于两个不同的主轴转速上获得的非常重要的观念。可是，尽管和工件有物理上的相连，但是控制刀具响应的动力学明显和工件的不同。这对于理解切削稳定性和振动的判断与描述具有重大意义。简而言之，切削振动可能不仅要归因于切削刀具，也要归因于工件。

1.3　稳定与不稳定的界限

对于在大切削深度时的粗车削，已研究出在四个不同的转速750r/min、1000r/min、1250r/min 和 1500r/min 时的稳定-不稳定的界限。下面的图展示了切削模型系统的工件和刀具的振动响应，其中的切削模型系统与在临界切削深度附近的稳定切削深度和不稳定切削深度相符。审查 x 轴和 z 轴的振动响应来分别鉴定工件和刀具的稳定性边界。图 1.13 ~ 图 1.16 里绘制的工件响应，每一个都演示了在相同主轴转速下的一个稳定的实例和一个不稳定的实例，它们分别受制于两个不同的切削深度。这样做是为了鉴定

在所考虑的那个特定切削深度下的不稳定的边界。

图 1.13 展示了在靠近临界切削深度 $\Omega=750\text{r/min}$ 时的工件特性。可以看出在 DOC = 1.40mm 条件下工件稳定地振动，但是在相同速度且当 DOC 增加到 1.45mm 时就会变得紊乱。0 和正的李雅普诺夫频谱明显地鉴定了这两个阶段。相应的刀具的运行如图 1.17 所示。一旦 DOC 从 1.40mm 增加到 1.45mm，时间轨迹就会随机振荡。相应的李雅普诺夫频谱证实了同样的现象。瞬时频率在低频区域稳定的情况下表现出宽带特性。受到刀具固有频率激发的频率随着时间保持不变。不像 1.40mm 的情况，当 DOC 为 1.45mm 时那个受到激发的刀具特征频率随着时间改变。这一频率的特性能在使用大 DOC 的刀具的所有不稳定的图中看到，如图 1.17 ~ 图 1.20（右半边）所示。

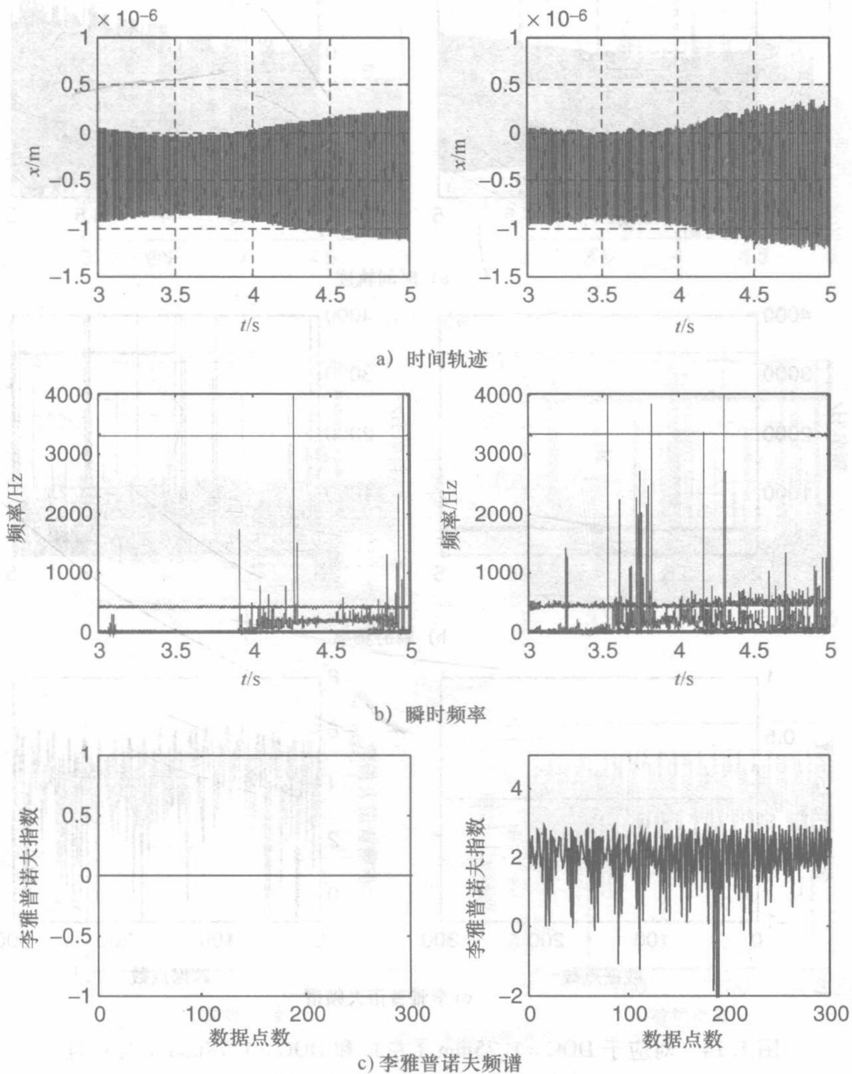


图 1.13　对应于 DOC = 1.40mm（左）和 DOC = 1.45mm（右）且 $\Omega=750\text{r/min}$ 的 x 轴方向的工件特性

当速度增加到1000r/min，临界的DOC也会增大。如图1.14所示，对应于两个不同切削深度的工件振动的结果。可以看出对应于DOC=1.75mm的实例在时域和频域都非常稳定。另外，具有正的李雅普诺夫频谱和宽带频率特性，DOC=1.78mm的实例是混沌不稳定的。对应的刀具的运行如图1.18所示。类似于DOC=750mm的情况，在DOC=1.78mm时，剧烈的振动、大振幅和正的李雅普诺夫频谱意味着刀具运动的不稳定状态。需要注意的是，与切削深度关联的响应只有0.03mm，小于1.78mm，这是一种稳定状态。

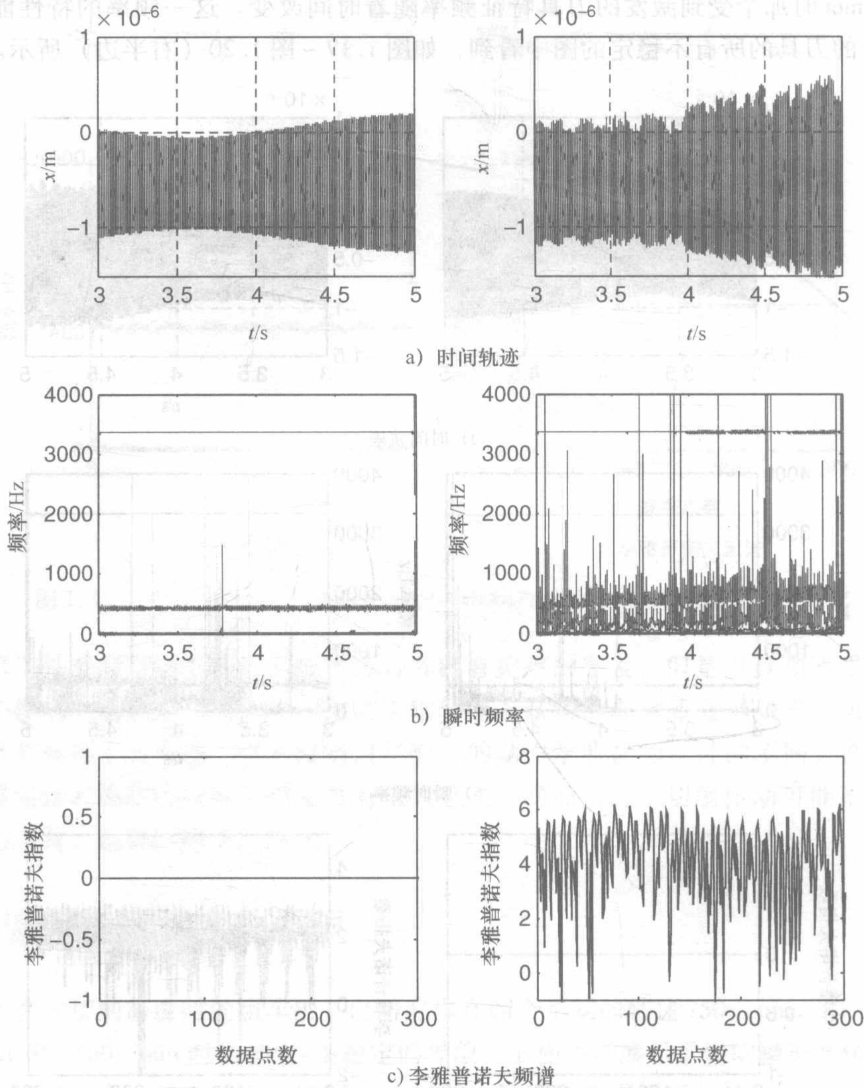


图1.14　对应于DOC=1.75mm（左）和DOC=1.78mm（右）且Ω=1000r/min的x轴方向的工件特性

进一步增加主轴转速到 1250r/min 会导致切削的稳定状态，因此把不稳定的界限移到了 1. 83 ~ 1. 84mm 的范围，如图 1. 15 所示。再次，在 DOC = 1. 84mm 时刀具关联的时间轨迹、瞬时频率和李雅普诺夫频谱都表明一个混沌的状态。这与在 DOC = 1. 83mm 时零李雅普诺夫频谱表明处在稳态的情况形成了对比。然而，在 DOC = 1. 83mm 情况下的时频特征揭示了这是一个分叉状态。只要有 1mm 的百分之一增量就足以使稳定切削运动进入动态不稳定性。图 1. 19 中那两个切削深度的刀具响应传达了一种有细微差别的特性。在 DOC = 1. 83mm 的情况下，刀具的振幅只有几纳米。在振幅中，0. 01mm 的增量会引起 0. 1mm 的混沌响应。这种混沌运动的状态由图 1. 19 中的李雅普诺夫频谱证

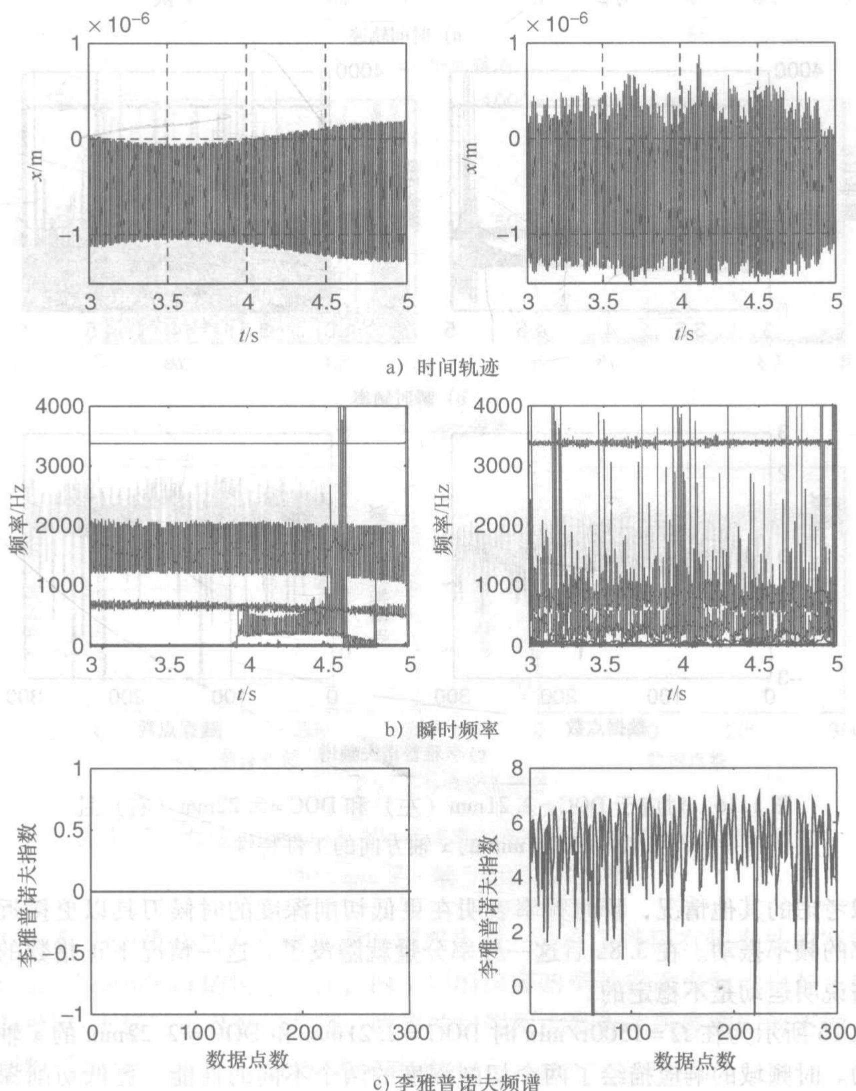


图 1. 15 对应于 DOC = 1. 83mm（左）和 DOC = 1. 84mm（右）且 Ω = 1250r/min 的 x 轴方向的工件特性

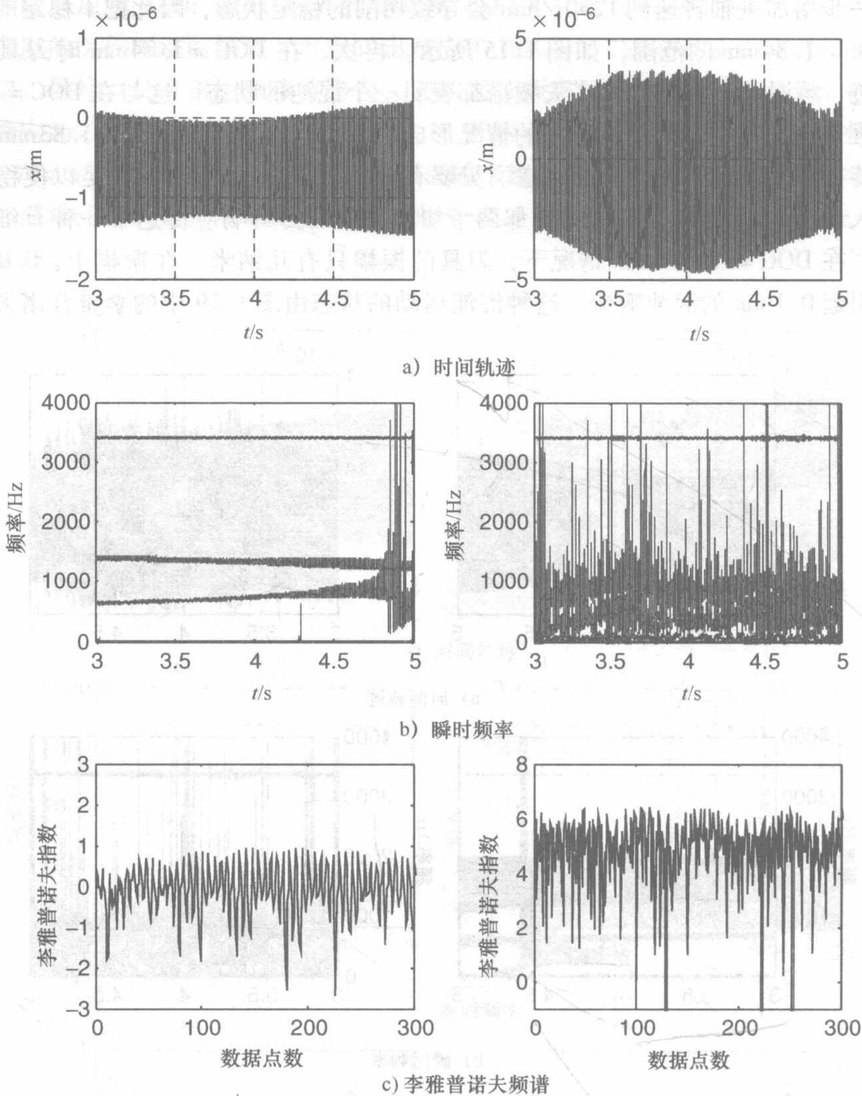


图 1.16 对应于 DOC = 2.21mm（左）和 DOC = 2.22mm（右）且 Ω = 1500r/min 的 x 轴方向的工件特性

明。不像考虑的其他情况，瞬时频率表明在更低切削深度的时候刀具以更接近于工件固有频率的频率振动。在 3.8s 后这一频率分量就隐没了。这一情况下正指数的李雅普诺夫频谱说明运动是不稳定的。

图 1.16 所示为在 Ω = 1500r/min 时 DOC = 2.21mm 和 DOC = 2.22mm 的 x 轴方向的工件运动。时频域的响应描绘了两个切削深度的两个不同的性能。更低切削深度的李雅普诺夫频谱并不是为零的一条直线。它在零附近振动，因此表明该运动有一种稳定-不稳定的边界类型。这一速度下的刀具性能相当于图 1.20 中速度为 1250r/min 时的情况。当切削深度从 2.21mm 增到 2.22mm 即增加 0.01mm 时，振动幅度增大到 10000 倍

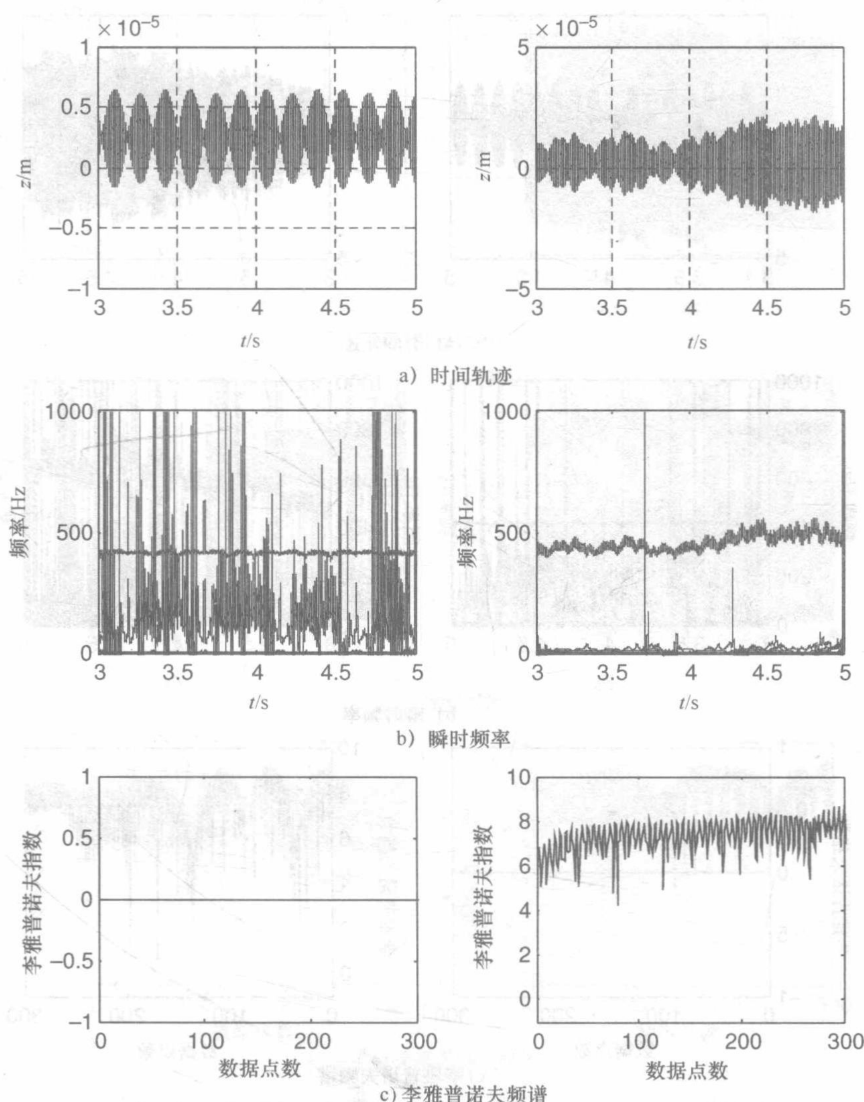
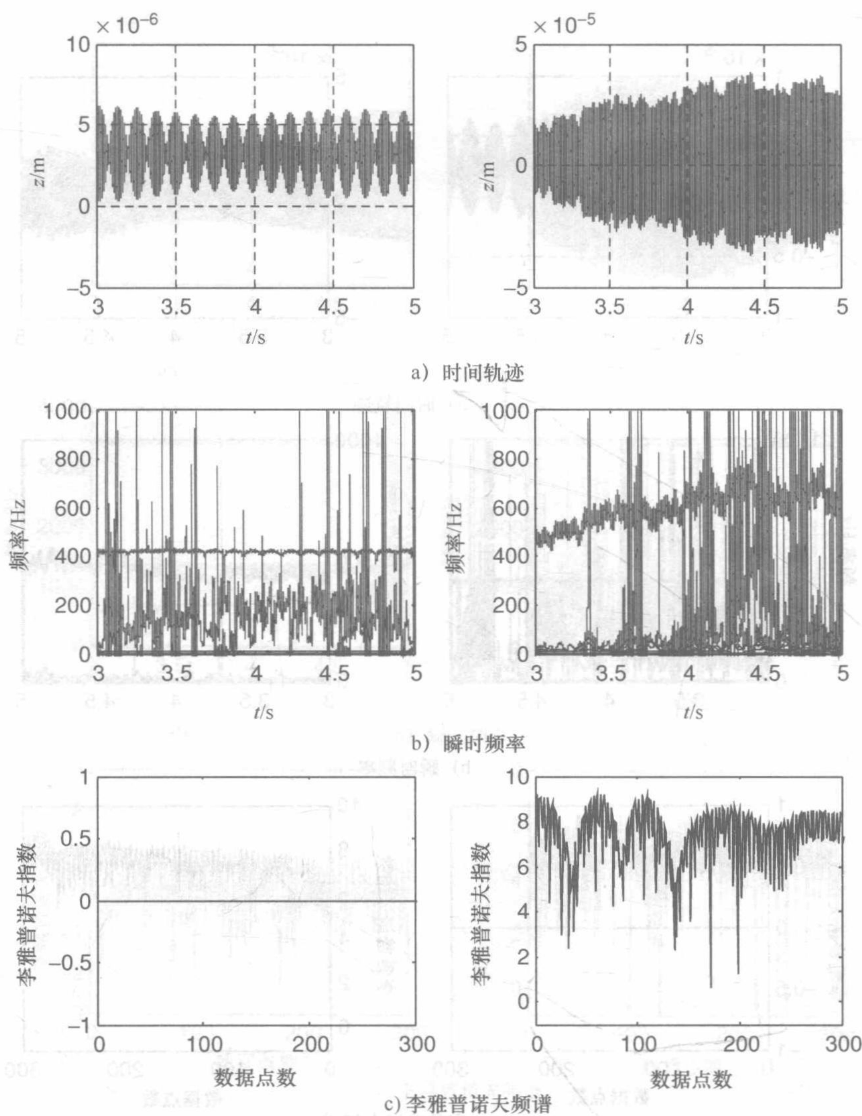


图 1.17　对应于 DOC = 1.40mm（左）和 DOC = 1.45mm（右）且 Ω = 750r/min 的 z 轴方向的刀具特性

以上。在 3.5s 后，更小切削深度的瞬时频率出现一个在工件固有频率处的宽带特性分量。像在 Ω = 1250r/min 的情况一样，两个切削深度的李雅普诺夫频谱也是正的。运用上述所有稳定-不稳定边界处的实例，临界的切削深度是为在所考虑到的不同主轴转速时的粗切削所定的。细节将在后面部分给出。

稳定性图中最常见的切削参数不是主轴转速，而是切削速度。对于直径为 D（mm）的有需要加工部分的工件，其相对应的切削速度定义为



a) 时间轨迹

b) 瞬时频率

c) 李雅普诺夫频谱

图 1.18 对应于 DOC = 1.75mm（左）和 DOC = 1.78mm（右）且 Ω = 1000r/min 的 z 轴方向的刀具特性

$$\text{cutting_speed} = \frac{\pi D\Omega}{1000 \times 60}\text{ms}^{-1}$$

式中，Ω 是主轴转速，单位为 r/min。

这意味着当有相同的切削速度的时候，可以有不同的主轴转速和工件直径。在铣削或钻削中，铣刀或钻头都有标准的直径。然而，在车削过程中，被加工的直径可以是基于产品要求的任意值。之前讨论的临界切削深度与参考文献［7］中的实验结果比较。实验发现，切削速度在 50～300m/min 范围内的临界切削深度如参考文献［7］中所述。

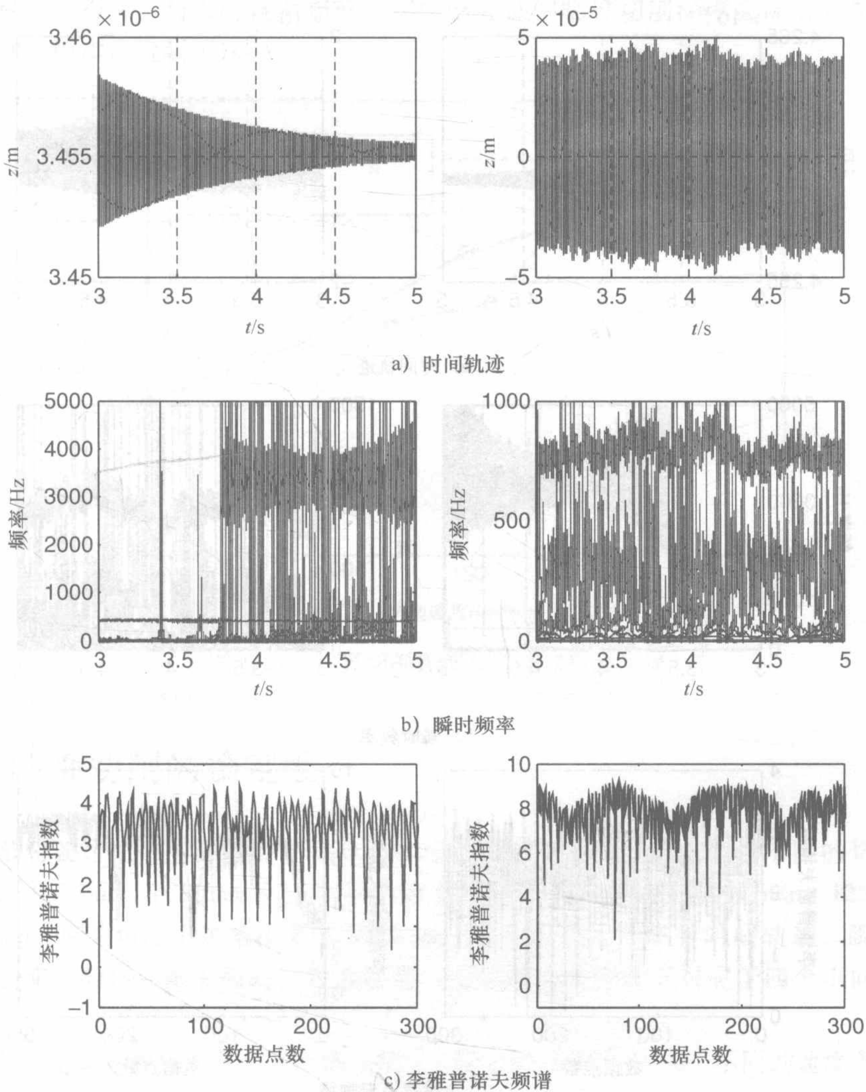


图 1.19 对应于 DOC = 1.83mm（左）和 DOC = 1.84mm（右）且 $\Omega = 1250\text{r/min}$ 的 z 轴方向的刀具特性

运用上述定义，稳定极限与每一个相对应的切削速度的临界切削深度如表 1.2 所示。

表 1.2 临界切削深度

主轴转速/(r/min)	切削速度/(m/min)	临界 DOC/mm
750	94.7	1.40 ~ 1.45
1000	126.3	1.75 ~ 1.78
1200	157.8	1.83
1500	189.4	2.21

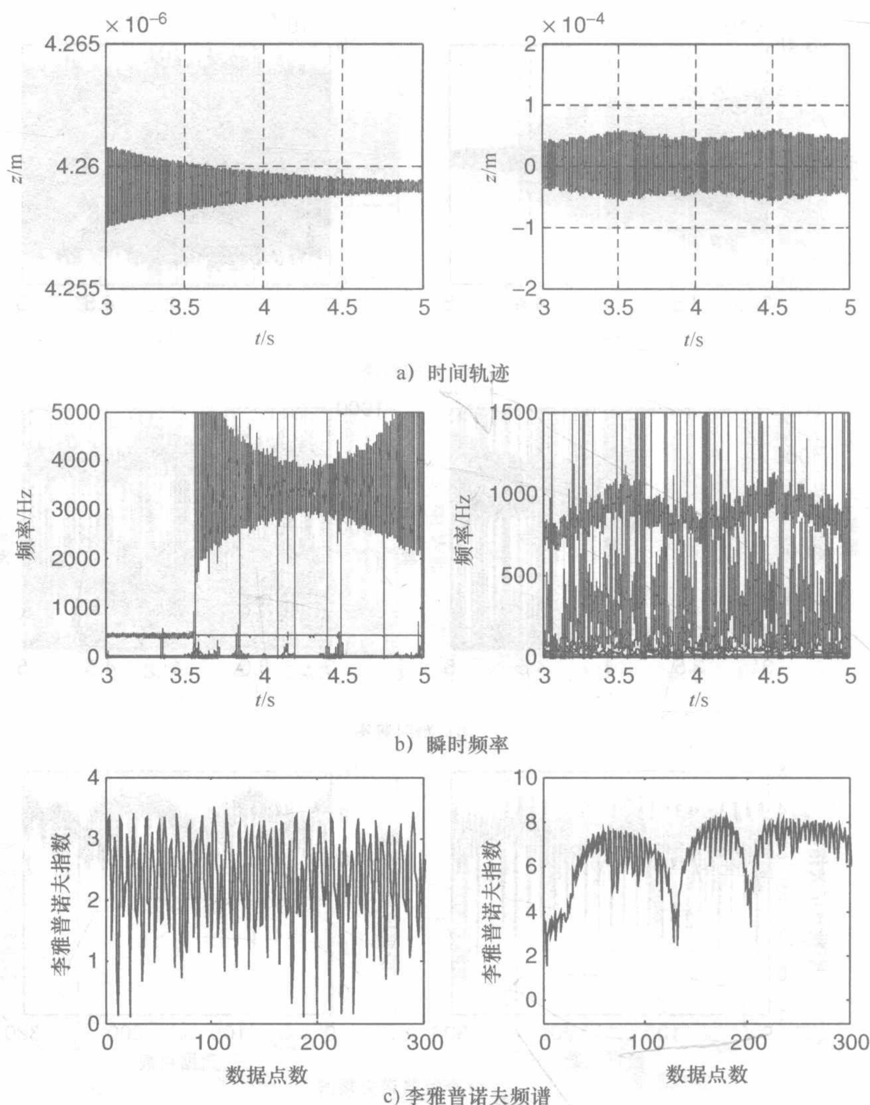


图 1.20 对应于 DOC = 2.21mm（左）和 DOC = 2.22mm（右）且 $\Omega = 1500\text{r/min}$ 的 z 轴方向的刀具特性

图 1.21 反映了临界切削深度和受增长速度控制的实验结果的比较。值得一提的是，该实验数据是适用于短工件的，因此工件的刚度比这一部分所考虑的模型工件的要高。从前面部分可以看出，工件尺寸和刀具几何形状影响切削稳定性。然而，用来研究的工件尺寸和刀具几何形状不同于参考文献［7］中相应的实验装置。并且这里所用的进给速度与实验里的只有大约 5% 的差别。这些差别当然造成了稳定极限的差异。

需要注意的是，在此处所考虑的速度范围内，参考文献［7］中的实验结果不同于

传统的稳定的裂片。与人的直觉相反，实验已经证明临界切削深度会随着切削速度而增加。加工模型也说明了这一点。

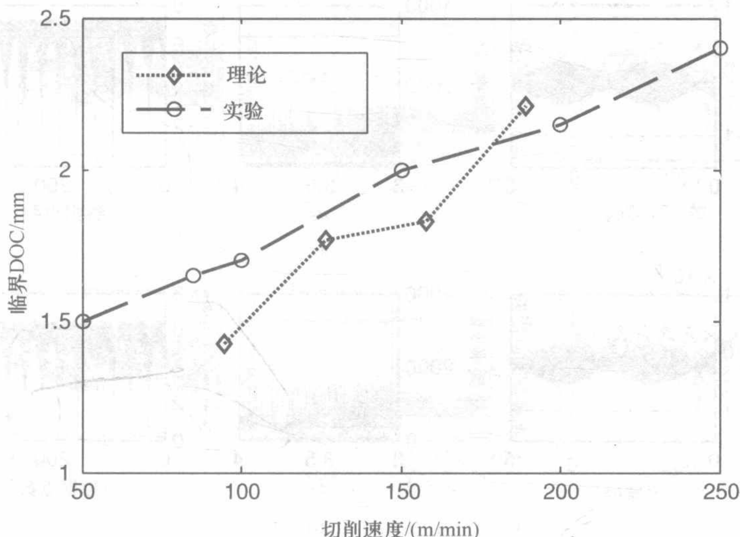


图 1.21 临界切削深度与实验数据的比较

1.4 精细切削的稳定性

本节将要讨论切削深度小于 1.00mm 时的切削稳定性。考虑三个不同的切削深度 0.50mm、0.75mm、0.90mm 和四个不同的主轴转速 750r/min、1000r/min、1250r/min、1500r/min。所有情况下进给都是 0.0965mm。所有图都有三栏：时间轨迹、瞬时频率和李雅普诺夫频谱。图中的四行代表在某一特定的切削深度下对应于四个不同速度的结果。

精加工的 x 轴方向工件的振动研究如下。图 1.22 展现了在四个不同的速度下 DOC = 0.50mm 时的运动状态。四种速度下的时间轨迹看起来相似，且它们相应的李雅普诺夫频谱都展现出带有正的指数的不稳定性。除去 $\Omega = 1250$r/min 的情况，在其他所有情况下工件都受到刀具固有频率的激发。

当切削深度增加到 0.75mm，工件变得更加稳定，如图 1.23 所示。类似于 DOC = 0.50mm 时的情况，在 DOC = 0.75mm 时，增加主轴转速并不会显著地改变工件的稳定状态。在 850 ~ 900Hz 时，所有的瞬时频率图都有一个宽带分量。这可以通过刀具固有频率的倍频得到解释。另外，李雅普诺夫频率并没有表现出带有零指数轮廓分明的稳定性。反而是指数在零附近振动并且有倾向于频谱负面的趋势。这可以认为是工件的临界稳定-不稳定的情况。

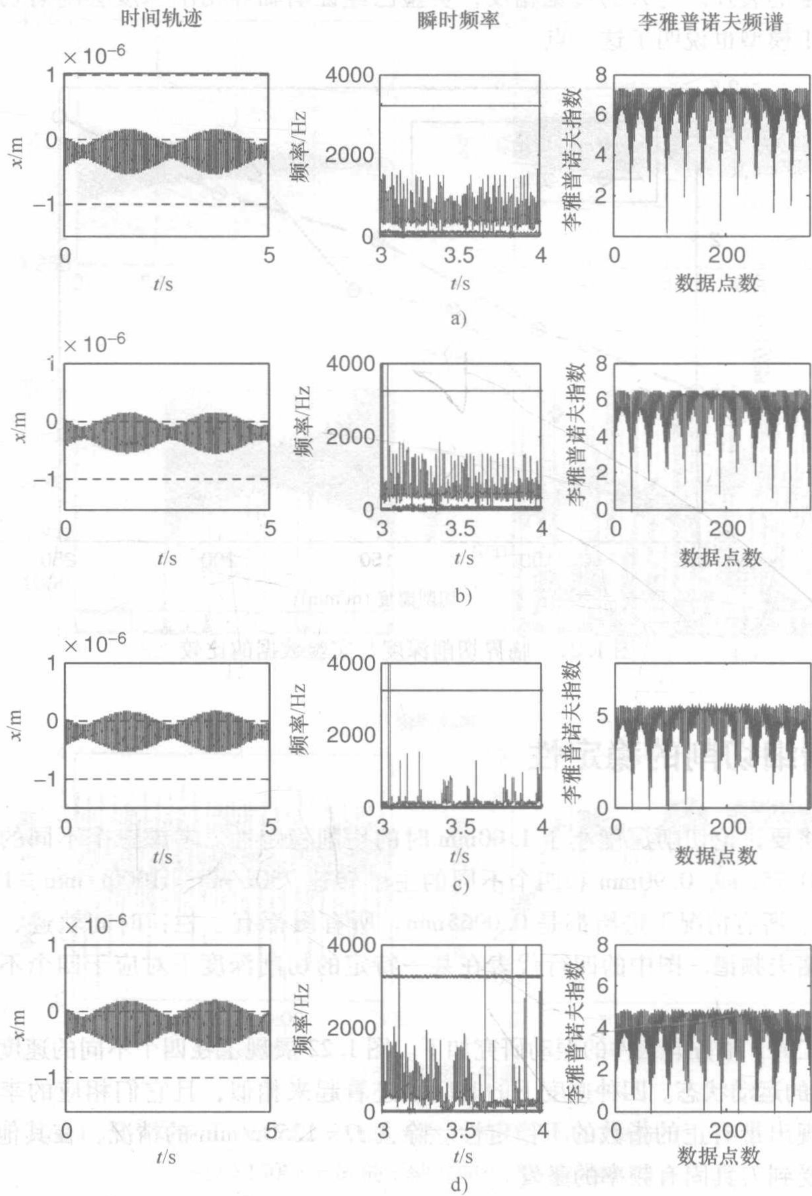


图 1.22　对应于 DOC = 0.50mm 在（a）Ω = 750r/min（第一行）、（b）Ω = 1000r/min（第二行）、（c）Ω = 1250r/min（第三行）和（d）Ω = 1500r/min（第四行）的 x 轴方向的工件特性

图 1.24 演示了在 DOC = 0.90mm 下工件的性能。可以看出，在这个切削深度下工件处于稳定的运动状态中。四个瞬时频率图都阐明了与分叉状态类似的类型，这一分叉状态有旋转频率和分量，而不是工件的固有频率。在图 1.24 所示的所有情况中，有

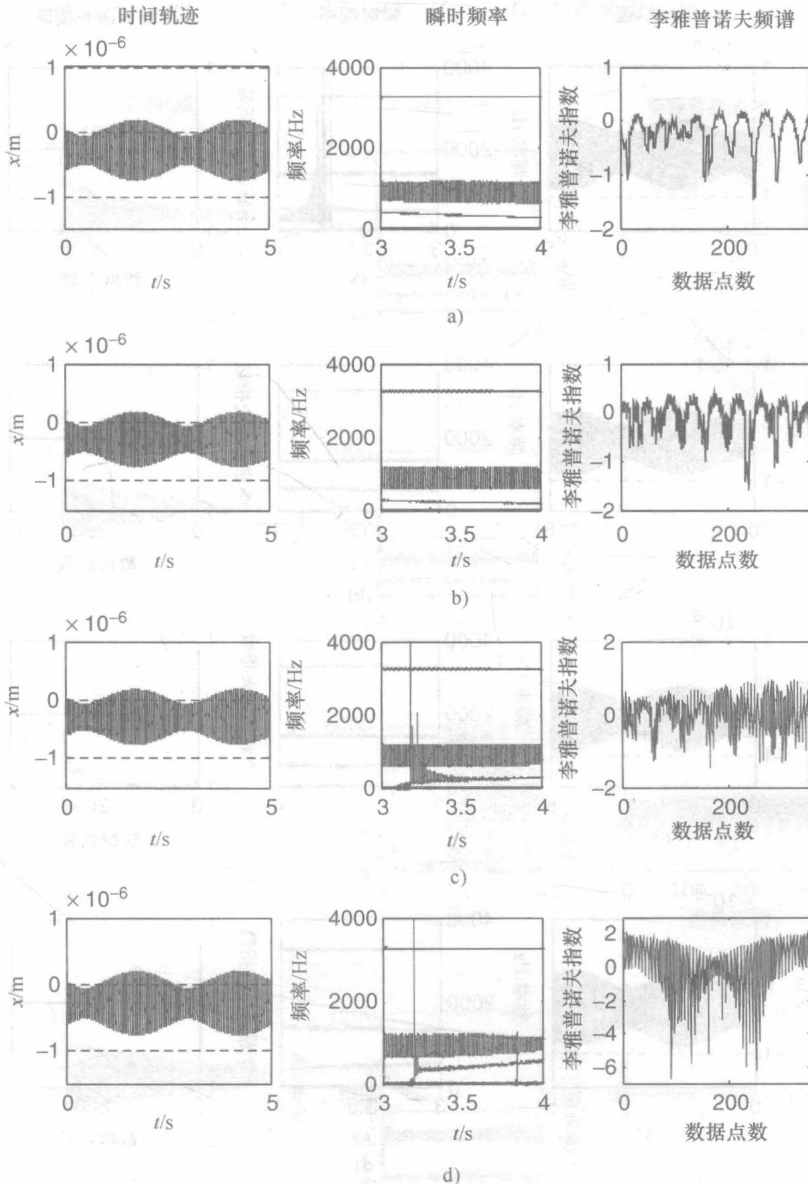


图 1.23　对应于 DOC = 0.75mm 在（a）Ω = 750r/min（第一行）、（b）Ω = 1000r/min（第二行）、（c）Ω = 1250r/min（第三行）和（d）Ω = 1500r/min（第四行）的 x 轴方向的工件特性

一个频率在 450 ~ 600Hz 之间，其他额外的分量处在 1300 ~ 1400Hz 的范围内。这些频率分量不会随着时间改变或者展现出宽带特性。正如零李雅普诺夫指数所验证的，运动是周期性的且稳定的。值得注意的是，不管在考虑范围内的速度，工件在 DOC = 0.50mm 时是动态不稳定的。但是它在 DOC = 0.75mm 时是临界稳定的，并且在 DOC = 0.90mm 时是稳定的。

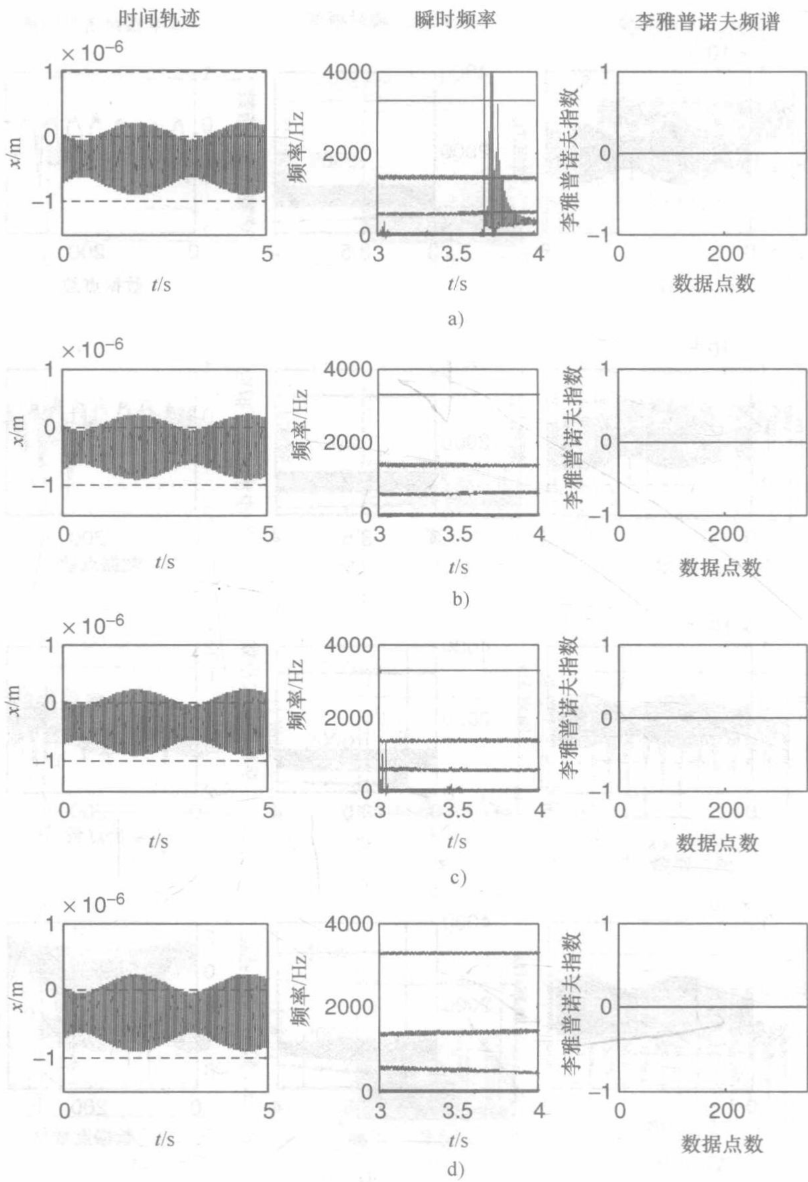


图 1.24 对应于 DOC = 0.90mm 在（a）Ω = 750r/min（第一行）、（b）Ω = 1000r/min（第二行）、（c）Ω = 1250r/min（第三行）和（d）Ω = 1500r/min（第四行）的 x 轴方向的工件特性

与前面章节中一样，这一部分研究的刀具在 z 轴方向的稳定性既考虑了时间又考虑了时频分析。图 1.25 展现了在 DOC = 0.50mm 时的刀具性能。注意除了 1250r/min 的情况，所有的时间轨迹都看起来相似。另外，对应的瞬时频率图也展现了相同的相似性，即只有在低频区域有分叉，且没有显示任何的宽带特性。当主轴转速为 1250r/min，如图 1.25c 所示，刀具被工件固有频率所激发且展现出宽带特性。此外，其相关联的李

雅普诺夫频谱表现出一种不稳定的状态，然而，在其他情况下，工具运动是稳定的且具有零指数。

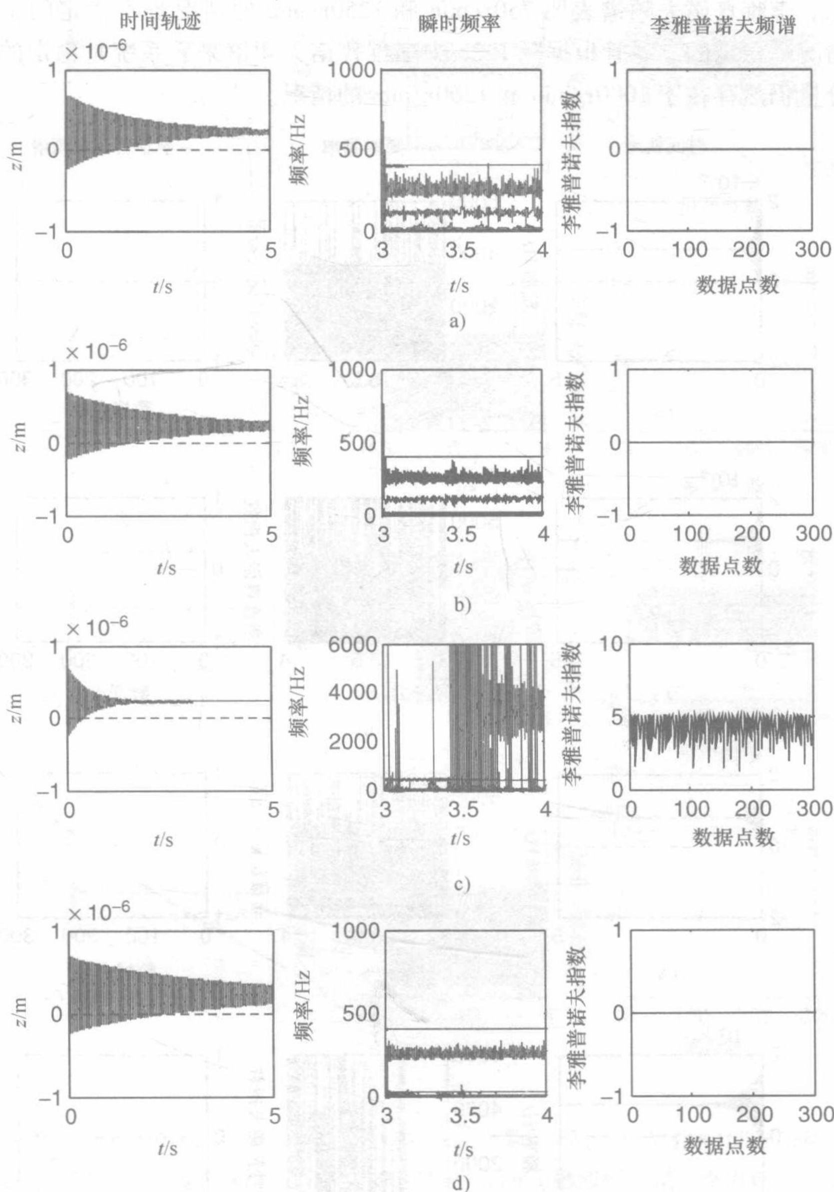


图 1.25　对应于 DOC = 0.50mm 在（a）Ω = 750r/min（第一行）、（b）Ω = 1000r/min（第二行）、（c）Ω = 1250r/min（第三行）和（d）Ω = 1500r/min（第四行）的 z 轴方向的刀具特性

当 DOC 增加到 0.75mm 时，所有速度的情况展现出相似的特性。在图 1.26 所示的瞬时频率图中，振动幅度很小且有分叉。然而，所有的李雅普诺夫频谱都展现了具有

零指数的稳定特性。进一步增加 DOC 到 0.90mm，从图 1.27 中可以看出四个不同速度的两种分类。750r/min 和 1250r/min 的情况类似，而 1000r/min 和 1500r/min 的情况是可比较的。李雅普诺夫频谱表明 750r/min 和 1250r/min 的情况是不稳定的，另外两种速度的情况是稳定的。尽管根据图 1.28 中李雅普诺夫频谱来看系统是稳定的，但是很多频率分量仍然存在于 1000r/min 和 1500r/min 的情况。

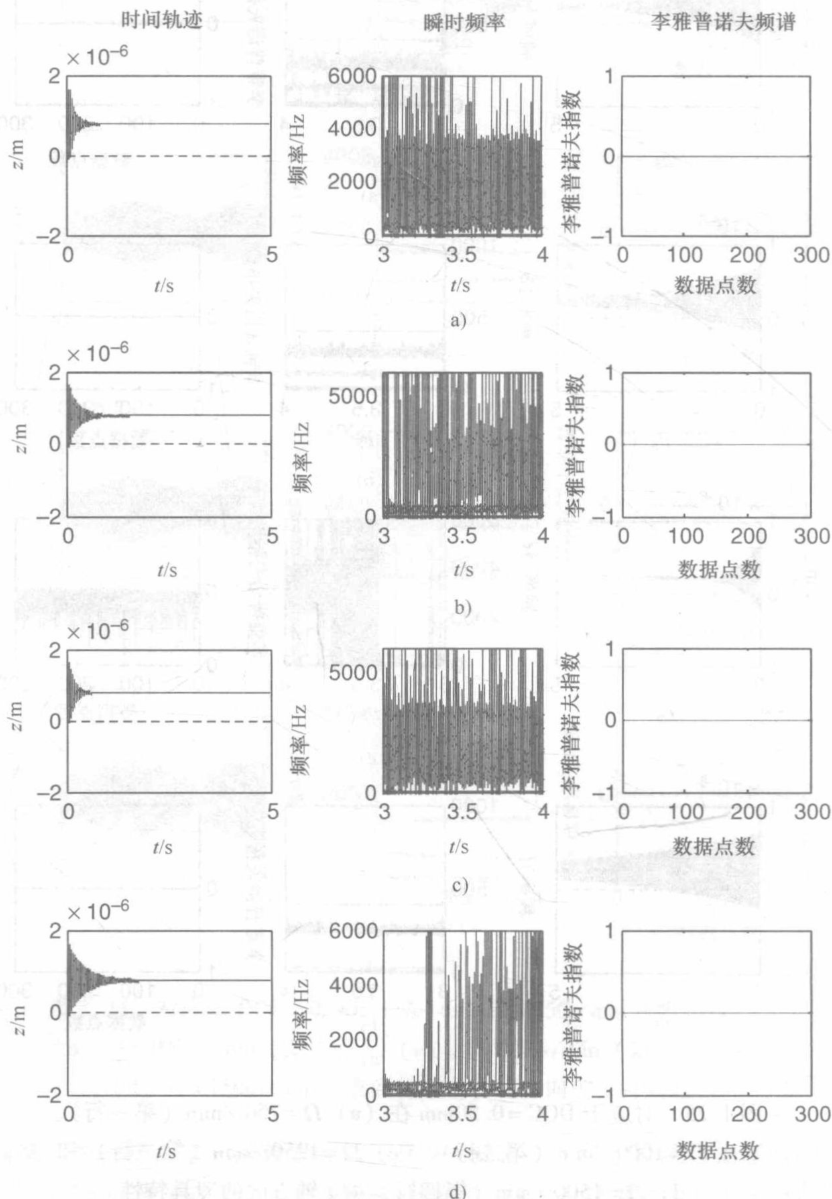


图 1.26 对应于 DOC = 0.75mm 在（a）Ω = 750r/min（第一行）、（b）Ω = 1000r/min（第二行）、（c）Ω = 1250r/min（第三行）和（d）Ω = 1500r/min（第四行）的 z 轴方向的刀具特性

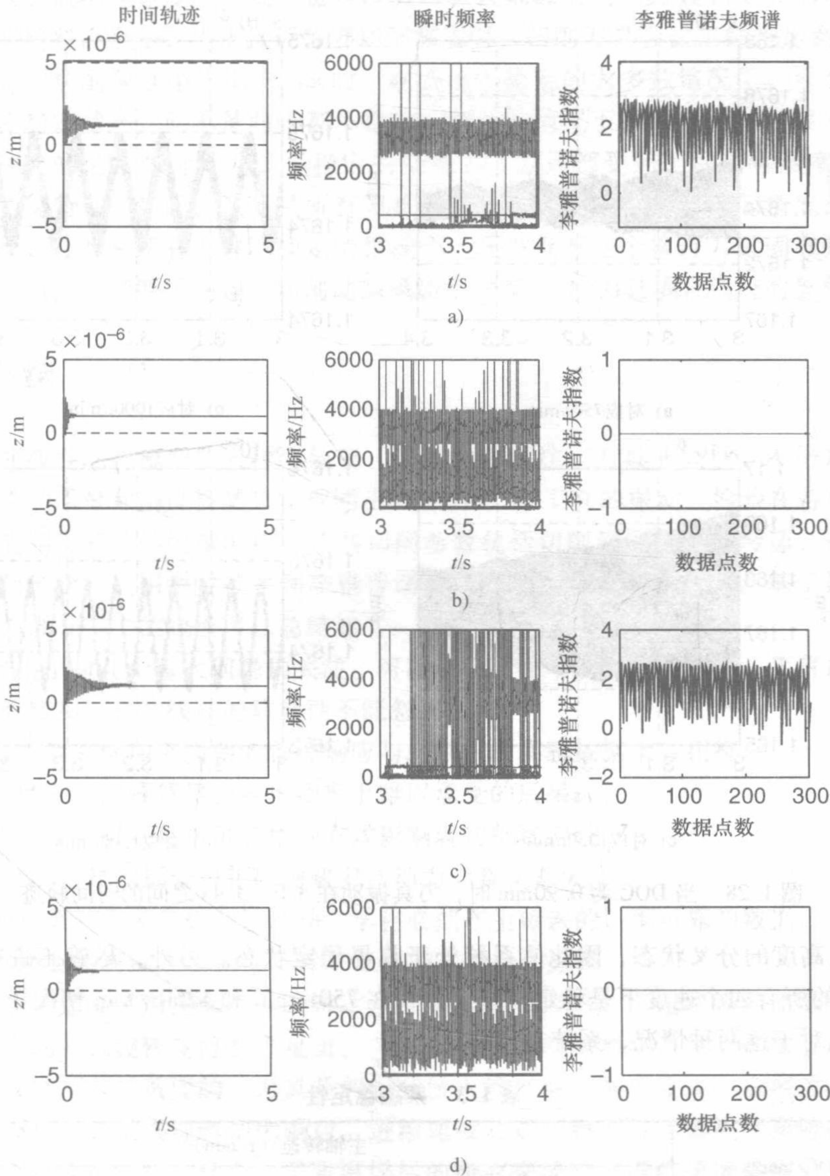


图 1.27 对应于 DOC = 0.90mm 在（a）Ω = 750r/min（第一行）、（b）Ω = 1000r/min（第二行）、（c）Ω = 1250r/min（第三行）和（d）Ω = 1500r/min（第四行）的 z 轴方向的刀具特性

整个系统的稳定性现在可以通过检验工件和刀具的稳定与不稳定状态来确定。如果工件和刀具都表现出稳定状态，那么系统就是稳定的。如果两者中任意一个表现出不稳定性，那么系统是不稳定的。根据这一分类法，系统的稳定性可以总结为表 1.3。表中 US、S 和 MS 分别代表不稳定、稳定和临界稳定。由于在 DOC = 0.50mm 时所有速度下的工件都是不稳定的，那么这一切削深度下系统是不稳定的。此外，在所考虑的所有四个速度下工件表现出稳定-不稳定的状态，且在 DOC = 0.75mm 的所有情况下刀

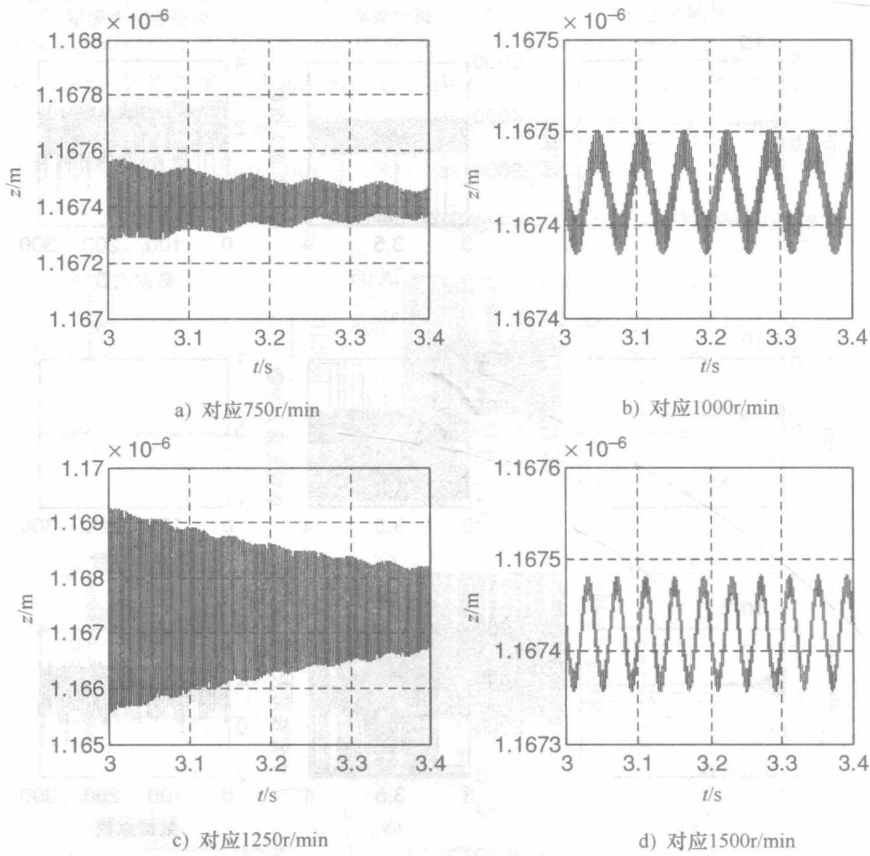


图 1.28　当 DOC 为 0.90mm 时，刀具振动在 3.0 ~ 3.4s 之间的时间轨迹

具表现出高度的分叉状态，因此使系统处于临界稳定状态。另外，尽管工件在 DOC = 0.90mm 的所有四个速度下是稳定的，但刀具在 750r/min 和 1250r/min 情况下是不稳定的。因此对于这两种情况，系统是不稳定的。

表 1.3　系统稳定性

DOC/mm	主轴转速/(r/min)			
	750	1000	1200	1500
0.90	US	S	US	S
0.75	MS	US	MS	US
0.50	US	MS	US	MS

粗切削加工稳定性的研究表明，在所考虑的速度范围中，低速是不稳定的。然而，随着速度的提高，其间会出现分叉状态。因此不能得出速度增加始终会使之达到稳定的结论。另外，根据所提出的车削模型可以看到临界切削深度会随着速度的增加而增加。结果表明这一观点是和实验数据相吻合的。值得注意的是，切削力的振幅取决于

力的非线性，而不是速度的增量。也可以看出，大多数情况下刀具和工件都显示出相似的不稳定阶段。但是，当更接近临界切削深度时，切削刀具会比工件先达到不稳定。与此相反，当切削深度小于1.00mm时，在系统不稳定的大多数情况下，只有工件或刀具处在不稳定状态，而不是两者都不稳定。有一些情况下是两者同时处在不稳定状态。值得注意的是，在所有刀具不稳定的情况下，刀具都受到工件固有频率的激发，且展现出带宽特性。然而，并不是所有刀具受到工件固有频率的激发的情况都是不稳定的。然而，在几乎所有工件不稳定的情况下，工件都有一个接近刀具固有频率的带宽的频率分量。这说明了在建立切削动态模型中考虑工件-刀具耦合效应的重要性。

1.5　小结

三维非线性动态模型并入再生效应、切削力非线性、刀具非线性、不平衡引起的旋转及工件的质量和刚度折减来实现同步耦合的刀具-工件的振动。检验在各种切削参数情况下受制于旋转的模型响应，这些切削参数包括切削深度、主轴转速、进给速度和刀具几何形状。运用瞬时频率和李雅普诺夫频谱来进行稳定性分析。基于讨论的结果和在前面部分得出的观点可以总结如下：

1）提出了对几个重大问题的关注。可以总结出在车削操作建模中，工件的振动不容忽视。旋转和刀具非线性的重要性不能忽视。

2）展示的三维加工模型的各种响应与文献中的实验数据十分相符。

3）工件振动的疏忽将会导致物理上难以承受的后果。

4）工件尺寸以一种不可忽略的方式影响着切削稳定性。

5）工件-刀具的耦合对正确理解刀具动力学意义重大。

6）使用线性化模型研究切削动力学将必然产生错误的、不可靠的数据。

7）发现旋转有助于切削稳定性和更大的工件振动振幅。

只有当考虑高进给速度时，旋转才会影响刀具动力学。当达到临界切削深度且工件不稳定振动时，旋转变得微不足道。为了理解底层的切削动力学，在加工过程建模中考虑非线性是至关重要的。刀具几何形状极大地影响切削稳定性。忽视刀具几何形状的加工模型将会错误理解切削响应。进给速度对切削稳定性有影响。高进给速度会赋予精车削操作稳定性。然而，需要更详尽的研究来证明高进给速度确实有助于高稳定极限。

临界切削深度随着主转轴速度的增加而增加。在定性意义上，这一观点与所给的物理数据相吻合。建模结果支持这一观点：振动会在低切削深度时发生。这与参考文献［8］中所表明的和参考文献［7］中实验结果观察到的是一致的。因此，不像常规的稳定性图表，本章中所建立的稳定性极限既有上部又有下部的稳定性区域。

使用大切削深度的粗切削的稳定性极限可以被一条线隔开。然而，对于使用小切削深度的精切削，有不同的稳定性区域且没有稳定性极限。

切削振动可以与动态稳定-不稳定情况的四种类型之一有关：刀具和工件都稳定；

刀具稳定和工件不稳定；工件稳定和刀具不稳定；刀具和工件都不稳定。

参考文献

[1] Huo, D., Cheng, K., 2008, "A Dynamics-Driven Approach to The Design of Precision Machine Tools for Micro-Manufacturing and Its Implementation Perspectives," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 222(1), 1–13.

[2] Dassanayake, A.V., Suh, C.S., 2007, "Machining Dynamics Involving Whirling. Part I: Model Development and Validation," *Journal of Vibration and Control*, 13(5), 475–506.

[3] Dassanayake, A.V., Suh, C.S., 2007, "Machining Dynamics Involving Whirling. Part II: Machining States Described by Nonlinear and Linearized Models," *Journal of Vibration and Control*, 13(5), 507–26.

[4] Dassanayake, A.V., Suh, C.S., 2008, "On Nonlinear Cutting Response and Tool Chatter in Turning Operation," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 13(5), 979–1001.

[5] Dassanayake, A.V., 2006, Machining Dynamics and Stability Analysis in Longitudinal Turning Involving Workpiece Whirling, PhD Dissertation, Texas A&M University.

[6] Rao, B. C., Shin, Y. C., 1999, "A Comprehensive Dynamic Cutting Force model for Chatter Prediction in Turning," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 9(10), 1631–54.

[7] Kim, J.S., Lee, B.H., 1990, "An Analytical Model of Dynamic Cutting Forces in Chatter Vibration," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 31(3), 371–81.

[8] Volger, M. P., DeVor, R. E., Kapoor, S. G., 2002, "Nonlinear Influence of Effective Lead Angle in Turning Process Stability," *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 124(2), 473–75.

第2章　基本的物理原理

本章简要回顾了切削振动的时频控制所基于的原理和相应的数学方程及它们的一些重要性质。由于时频控制采用了小波变换和自适应滤波器作为它的最基本的物理分量，因此讨论基础主题，如采样定理、z 变换和卷积，是有必要的。通常用来描述动态不稳定性的时频分析工具也在这一章的最后部分做出了总结，这些工具只适用于线性平稳信号。从中得出的重要结论是它们不适用于研究其响应本来就是非线性和不稳定的车削和切削操作。由于运用了线性代数和矩阵运算来简化了将在随后的章节中出现的时频控制算法公式，故即使没有说明，用在表达方程时的数学符号仍然有效。

2.1　欧几里得矢量

欧几里得矢量空间是一个满足某些数学法则的线性泛函空间。矢量 $\boldsymbol{V}$ 是一个复数的数列，v_1，v_2，…，v_n，它被定义在 n 个相互正交的单位矢量 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 横跨的 n 维矢量空间中。$\boldsymbol{V}$ 是其组成元素的一个线性组合。

$$\boldsymbol{V} = [v_1, v_2, \cdots, v_n]^{\mathrm{T}} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} v_k\boldsymbol{e}_k \tag{2.1}$$

式中，上标 T 表示矢量的转置。

矢量 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的欧几里得内积，定义了一个矢量在另一个矢量上的投影，是两个矢量的元素的标量和。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{U} &= \boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U} \\ &= \bar{v}_1u_1 + \bar{v}_2u_2 + \cdots + \bar{v}_nu_n \\ &= \sum_{j=1}^{N}\bar{v}_ju_j\end{aligned} \tag{2.2}$$

式中，上标 H 表示矢量的厄米算符且上部的横杠表示矢量元素 v_j 的复数共轭。

当 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{U}=0$ 时 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 是相互正交的。由式（2.1）和式（2.2）给出的定义，可以分别得出 $\boldsymbol{V}$ 在 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的投影和 $\boldsymbol{U}$ 沿着 $\boldsymbol{V}$ 方向的投影，分别如下：

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_k \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{u}_V = \boldsymbol{U}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{V}}{|\boldsymbol{V}|}\right) \tag{2.4}$$

式中，$\dfrac{\boldsymbol{V}}{|\boldsymbol{V}|}$是一个单位矢量，通过使用本身的矢量范数来标准化 $\boldsymbol{V}$ 定义的。

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{V}|^2 &= \boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V} \\ &= \sum_{j=1}^{N}\bar{v}_jv_j \\ &= \sum_{j=1}^{N}|v_j|^2\end{aligned} \tag{2.5}$$

因此定义在三维欧几里得空间中的相应的矢量范数为

$$|\boldsymbol{V}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{2.6}$$

2.2　线性空间

不像分布着一组正交单位矢量的欧几里得矢量空间，函数空间通常是由一组相互正交（基准）且满足某些特定要求的函数来定义。例如，在有限的能量空间 $L^2(-\infty, \infty)$，或者表示为 $L^2(\boldsymbol{R})$，所有函数 $f(x)$ 在无穷积分的意义上都必须满足以下两个条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty \tag{2.7}$$

$$\| x \| = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right]^{1/2} < \infty \tag{2.8}$$

式中，$\| x \|$ 被称作 L^2 范数。

这一范数通常被用来建立定义在方均根意义上的两个有限能量函数之间的误差。例如

$$\| \varepsilon \| = \| f(x) - y(x) \| = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - y(x)|^2 \mathrm{d}x \right]^{1/2} \tag{2.9}$$

最小化式（2.9）测得的误差来消除 $f(x)$ 与 $y(x)$ 之间的差异。利用基于梯度迭代最陡下降的方法来最小化 $\| \varepsilon \|^2$，而不是 $\| \varepsilon \|$，这一过程被称作最小方均（LMS）算法。自适应且容易实现地，LMS 算法和展示各级收敛性能的许多变化通常被用作滤波运算。

定义在 $\boldsymbol{C}[a, b]$ 空间中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积有如下的表示法：

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(t) \bar{g}(t) \mathrm{d}t \tag{2.10}$$

函数 $f(x) \in L^2$ 可以用共同横跨特定空间的一组正交基函数 $\{\varphi_j(t)\}_{j \in Z}$ 来表示，即

$$f(t) = \sum\nolimits_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varphi_j(t) \tag{2.11}$$

类比式（2.3），系数 c_j 由研究基函数正交性的属性的正交分解来确定，这一正交基函数为当 $j \neq k$ 时 $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 0$，当 $j = k$ 时 $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 1$。

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi_k(t)} \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum\nolimits_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varphi_j(t) \right) \overline{\varphi_k(t)} \mathrm{d}t \\ &= c_k \end{aligned} \tag{2.12}$$

为了说明正交分解的运算，考虑由无穷积分定义的有限时间域函数 $f(t) \in L^2(\boldsymbol{R})$ 的傅里叶变换：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t$$

$$= \langle f(t), e^{i\omega t} \rangle \tag{2.13}$$

式（2.13）定义在其中的 L^2 赋范线性空间把指数函数 $e^{i\omega t}$ 作为它的满足正交性的基函数。$F(\omega)$ 分解系数也是 $f(t)$ 在特定基函数 $e^{i\omega t}$ 上的投影，表示 $f(t)$ 在频率 ω 处的分量。一旦在所有频率时都可获得 $f(t)$ 的所有分量，$f(t)$ 可以使用下面的叠加积分重新得到，故 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} dt \tag{2.14}$$

2.3　矩阵

一个表示为 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 的 $i \times j$ 矩阵是欧几里得空间的一个运算符，其空间有一组以矩形阵列排列的 a_{ij}，如下：

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

如果 $i=j$，$\boldsymbol{A}$ 是一个方阵。如果所有的元素 $a_{ij}=0$，$\boldsymbol{A}$ 就是一个零矩阵。如果除去对角元素，所有的非对角即 $i \neq j$ 的 $a_{ij}=0$，$\boldsymbol{A}$ 是一个对角阵。当 $a_{ii}=1$ 时单位矩阵是对角矩阵的一个特殊情况。$\boldsymbol{A}$ 的转置表示为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]$，即把行和列互换了。如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是一个正交矩阵。

同型的两个矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 和 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ 可以相加减得出 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = [c_{ij}]$，其中 $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$。$\boldsymbol{A} = [a_{ln}]$ 与 $\boldsymbol{B} = [b_{nm}]$ 的积，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$，定义为

$$c_{lm} = \sum_{p=1}^{n} a_{lp} b_{pm} \tag{2.16}$$

只有当 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数的时候，式（2.16）的运算才有效。必然呈现矩阵乘法是非交换的这一状况。通常是 $\boldsymbol{BA} \neq \boldsymbol{AB}$。

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 的厄米转置，表示为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = [\overline{a}_{ji}]$，是转置矩阵的复共轭。满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{I}$ 的单位矩阵也满足这一重要特性：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{-1}$。如果方阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，那么 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 就叫作只有对角元素 a_{ij} 为实数的厄米矩阵。一个厄米矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个半正定的，如果

$$\text{对于所有的 } x \in \boldsymbol{C}^n \text{ 和 } x \neq 0, x^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}x \geqslant 0 \tag{2.17}$$

一个 $n \times n$ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的（i，j）余子式 $\boldsymbol{M}_{ij}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵的行列式，这一子矩阵是通过移去 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 列得到。$\boldsymbol{A}$ 的（i，j）代数余子式 $\boldsymbol{C}_{ij}$ 只是 $\boldsymbol{C}_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$。方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式表示为 det（$\boldsymbol{A}$），用它的代数余子式定义：

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{C}_{ij} \tag{2.18}$$

$\boldsymbol{A}$ 的迹表示为 trace($\boldsymbol{A}$)，也是一个标量：

$$\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2.19}$$

它只是对角元素的总和。使用代数余子式，方阵$\boldsymbol{A}$的逆阵表示为$\boldsymbol{A}^{-1}$，满足条件$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$，定义为

$$(a_{ij})^{-1} = \frac{C_{ij}}{\det(\boldsymbol{A})} \tag{2.20}$$

需要注意的是，式（2.20）计算出逆阵$\boldsymbol{A}^{-1}$的各个元素，且当$\det(\boldsymbol{A}) = 0$时，矩阵被称为奇异的。

下面介绍特征值与线性变换。

$n \times n$方阵$\boldsymbol{A}$的特征值是下列特征方程的非零解λ_i，$i=1, 2, \cdots, n$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}) = 0 \tag{2.21}$$

它是从下列特征矩阵导出

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{i\times 1} = \lambda_i \boldsymbol{x}_{i\times 1} = \boldsymbol{y}_{i\times 1} \tag{2.22}$$

式（2.22）的物理诠释是通过$\boldsymbol{A}$的运算，$n\times 1$矢量$\boldsymbol{x}$（通过平移或旋转，或两者兼有）转变成相同矢量空间的矢量$\boldsymbol{y}$。$\boldsymbol{x}$的组件称为特征矢量。为了满足式（2.22），特征矢量必须是一个线性无关基矢量的正交组。特征值的一些重要性质是

$$\begin{aligned} \mathrm{trace}(\boldsymbol{A}) &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} \lambda_i \\ \det(\boldsymbol{A}) &= \prod\nolimits_{i=1}^{n} \lambda_i \\ \det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) &= \prod\nolimits_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i) \end{aligned} \tag{2.23}$$

式（2.22）的特征矩阵可以使用矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$来改写，矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$的对角元素是所有特征值λ_i，$i=1, 2, \cdots, n$。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{x}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

由于特征矢量$\boldsymbol{x}$是线性非相关的，因此是非奇异的。有如下线性变换运用$\boldsymbol{x}$有效对角化矩阵$\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{2.25}$$

对式（2.25）的理解是通过采用特征矢量$\boldsymbol{x}$作为矢量空间的基，$\boldsymbol{A}$另外可表示为对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$。作为一个通过特征矢量的线性变换，$\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$被称为基于$\boldsymbol{A}$的相似变换。

2.4　离散函数

定义在有限维的离散线性空间的离散函数是一个可数的有限集，也就是它是编号

序列组，如

$$x(n)=\{x(1),x(2),\cdots,x(N)\},n=1,2,\cdots,N \tag{2.26}$$

离散线性空间的离散集的运算规则与定义在连续线性空间的带有特定范数的相似。两个离散序列的和与内积分别为

$$w(n)=x(n)\pm y(n)=\{x(1)\pm y(1),\cdots,x(N)\pm y(N)\} \tag{2.27}$$

$$\langle x(n),y(n)\rangle=\sum x(n)\bar{y}(n) \tag{2.28}$$

正交分解和 p 范数也同样被定义为

$$\langle x(n),\varphi_k(n)\rangle=\sum x(n)\overline{\varphi_k(n)}=c_k \tag{2.29}$$

$$\| x(n)\|_p=\Big[\sum_n |x(n)|^p\Big]^{1/p} \tag{2.30}$$

注意，当 $p=2$ 时，范数是欧几里得范数。

在一个恒定的时间间隔（采样周期）T 内采样一个时间函数 $x(t_n)$，$t_n=nT$ 且 $n=0, 1, 2, \cdots, N-1$，通常表示为 $x(n)$。离散序列 $x(n)$ 的傅里叶变换用下列表示法定义：

$$X(\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-in\omega} \tag{2.31}$$

式（2.31）中 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换对于理解滤波操作非常重要，在傅里叶（频率）域中是一个增值过程。

2.4.1　卷积和滤波运算

一个滤波器在数学上是一个时不变的运算，其特定属性为如果输入 $x(t)$ 引发一个输出 $y(t)$ 作为响应，那么一个带有时间延迟 $\hat{t}$ 的输入 $x(t-\hat{t})$ 会产生一个带有时间延迟 $\hat{t}$ 的输出 $y(t-\hat{t})$ 作为响应。这一特性也表明了线性关系，即缩放和总和的输入 $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$ 会引发缩放和总和的响应 $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$。

作为线性运算，数字滤波作用在序列输入并改变其频谱特性作为输出。具体操作称为滤波，是卷积，它定义了线性时不变系统的输入-输出关系，它实际上是滤波器。运用滤波器 $h(n)$ 过滤 $x(n)$ 产生滤波输出 $y(n)$，这一过程通过卷积实现：

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_k h(k)x(n-k) \tag{2.32}$$

两个卷积序列的傅里叶变换尤其与滤波器的设计有关。相关性是由卷积定理建立起来的，卷积定理即 $f(n)$ 与 $g(n)$ 卷积的傅里叶变换恒等于两个序列各自的傅里叶变换的乘积，即

$$F\{f(n)*g(n)\}=F\{f(n)\}\cdot F\{g(n)\} \tag{2.33}$$

式中，$F\{\cdot\}$ 为傅里叶变换运算。

换句话说，在傅里叶变换的情况下，在离散时间域的卷积等于频域的乘积。为了验证卷积定理，用明确的方式来表示所有术语，以便于式（2.33）的左边展开为

$$F\{f(n)*g(n)\}=\sum_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k}f(k)g(n-k)\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}$$
$$=\sum_{k}f(k)\Big[\sum_{-\infty}^{\infty}g(n-k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}\Big] \tag{2.34}$$

括号中的无穷求和项经过简单的变量代换操作可以表示为

$$\sum_{-\infty}^{\infty}g(n-k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}F\{g(n)\} \tag{2.35}$$

代入上面的结果，有

$$F\{f(n)*g(n)\}=\sum_{k}f(k)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}F\{g(n)\}\right]$$
$$=F\{g(n)\}\Big[\sum_{k}f(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\Big] \tag{2.36}$$
$$=F\{g(n)\}\cdot F\{f(n)\}$$

验证完毕。

2.4.2　抽样定理

在一个恒定的时间间隔 T 内采样一个能量有限的时间函数 $x(t)$，$t_n=nT$ 且 $n=0$，1，2，…，$N-1$。如果采样率 $f_s=1/T$ 高于 $x(t)$ 的最高频率的两倍，那么 $x(t)$ 的采样序列表示为 $x(nT)$，包含了时间函数的所有信息。如下所述，上述的正式声明为采样定理：如果 $x(t)$ 频率带限为 W（Hz），即 $-2\pi W<F\{x(t)\}<2\pi W$，那么它完全可以用在采样率 $f_s>2W$ 处取得的采样序列 $x(n)$ 来表示：

$$x(t)=\sum\nolimits_{-\infty}^{\infty}x(nT)g(t-nT) \tag{2.37}$$

式中

$$g(t)=\mathrm{sinc}(\pi f_s t)=\frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} \tag{2.38}$$

换句话说，利用定义在式（2.38）中的 sinc 函数，通过它在采样间隔的插值法，$x(t)$ 可以被无误差地重构。

由于

$$\langle g(t-nT),g(t-mT)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-nT)\bar{g}(t-mT)\,\mathrm{d}t$$
$$=\begin{cases}0,m\neq n\\T,m=n\end{cases} \tag{2.39}$$

那么 $g(t)=\mathrm{sinc}(\pi f_s t)$ 是一组正交的函数。现在考虑下列傅里叶级数

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bar{g}(t-mT)\,\mathrm{d}t=\sum\nolimits_{-\infty}^{\infty}x(nT)\int_{-\infty}^{\infty}g(t-nT)\bar{g}(t-mT)\,\mathrm{d}t$$
$$=x(mT)T \tag{2.40}$$

在推导中使用上述式（2.37）的情况下，求和与积分是可以互换的。从式（2.40）得

出的采样序列 $x(mT)$ 可以作为式（2.37）的无限正交分解的系数。

$$x(mT) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{g}(t - mT)\,\mathrm{d}T \tag{2.41}$$

2.4.3　z 变换

z 变换是设计数字滤波器组的大量的选择工具。这个变换绘制了在时域的一个离散的数字序列到 z 域的轨迹，得到与离散拉氏变换相似的复数表现形式为

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{2.42}$$

傅里叶变换概念的类比很容易注意到。通过用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$ 代替 z，式（2.42）变成

$$X(z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega} \tag{2.43}$$

故必然，z 变换使时间序列 $x(n)$ 被控制在基本的光谱信息保存完好的复数域内。

在 z 变换的许多性质中，收敛域（ROC）对测定系统（输入-输出）稳定性至关重要。ROC 是满足收敛条件的 z 值集合。

$$\left|\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}\right| < \infty \tag{2.44}$$

一旦滤波器在复平面 z 域中稳定，原始的时间序列 $x(n)$ 可以使用逆 z 变换来恢复：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z \tag{2.45}$$

其中曲线积分沿着 ROC 闭合路径的逆时针方向执行。z 变换另外一个重要的性质类似于式（2.33），即

$$\begin{aligned} Z\{f(n) * g(n)\} &= Z\{f(n)\} \cdot Z\{g(n)\} \\ &= F(z) \cdot G(z) \end{aligned} \tag{2.46}$$

式中，$Z\{\cdot\}$ 是 z 变换运算且 $F(z)$ 和 $G(z)$ 可以分别理解为 $f(n)$ 和 $g(n)$ 的 z 变换。不足为奇的是，离散时间域的卷积相当于复平面 z 域的乘法。

2.5　动态响应的特征工具

在采用恰当的控制方法之前，切削过程完全具有非线性响应及不稳定性的特点，这一点是极其重要的。动态系统的响应通常可以是一个固定的点、一个周期解或者一个非周期解。一个稳定线性或近似线性的系统会有一个平衡点或者一个固定点作为其响应。Hartmen-Grobman 定理规定一个摄动系统的动态特性定性地类似于它在平衡点附近对应的线性部分[1]，因此在平衡点附近的稳定性可以通过轻微地扰动这一点来确定。如果系统恢复到原点，那么系统在这一点附近是稳定的。否则，如果系统远离这一点，它就是不稳定的。

通过研究在状态空间中的解轨迹的几何特征和流动路径，轨迹附近的稳定性可以用相图来确定。有助于鉴定系统动态的强大图形化工具也包括 Poincaré 映射图和分叉

图。Poincaré 映射图是状态空间中序列点的集合，且这个状态空间是由贯穿空间[2]中的广义曲面或平面不断演变的轨迹的渗透生成的。对于周期性的扰动，二阶非线性振荡器通过闪频观测在扰动函数的某一特定阶段的位置和速度，可以得到一个 Poincaré 映射图。分叉图用于绘制当一些参数发生变化时从稳定性到混沌运动的过渡。通过像在 Poincaré 映射图中一样对运动时间取样和展示控制参数的输出，可以获得这种图。图 2.1 中的二次映射的分叉图作为一个例子给出，其中 f_μ 是相对于控制参数 μ 且使用迭代形式绘出的，定义为

$$f_\mu(x)=\mu x(1-x)\, x\in[0,1]$$
$$y=f_\mu^n(x)=f_\mu(f_\mu(f_\mu\cdots(x))) \tag{2.47}$$

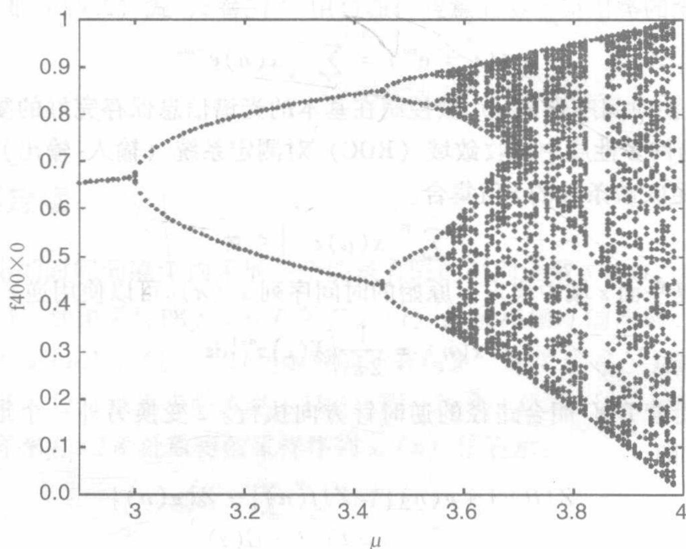


图 2.1　二次映射的分叉图

可以看出，倍周期分叉在 $\mu=3$ 处发生，且另一个分叉在大约 $\mu=3.47$ 处发生。通过倍周期分叉的级联，映射在 $\mu=4$ 变得混沌。

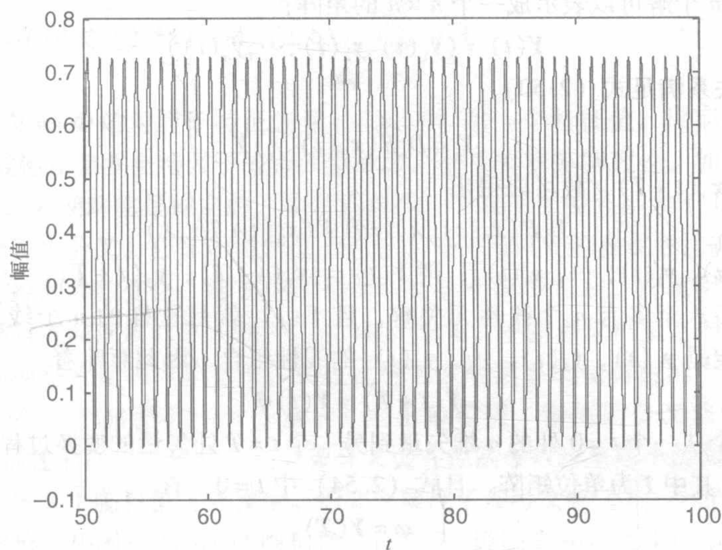
对于在相图近轨道上运行且一个周期 T 后精确地返回到它开始的地方的轨迹，运动是周期性的，且那个闭合轨道称为一个极限环。周期运动的轨迹，最初开始于要么接近于或者最大限度地远离于原点，当周期解是稳定的时候，它总是收敛到相空间中的极限环。周期解将定位到在相应的 Poincaré 映射图里的同一个位置。Poincaré 映射图是一个定性的拓扑方法，通过探索 Poincaré 部分的序列点的几何特征，它被广泛用于混沌预测和状态空间稳定性研究。这一 Poincaré 映射图和状态空间[3]中的流程有相同的总体稳定型。当一个系统经历了混沌运动，与之相关的 Poincaré 映射图将显示分叉状态和程度的特定形状及特性。图 2.2 所示为参考文献［4］中非线性响应的时间历程、相图和 Poincaré 映射图。在图 2.2b 中显示了相图中的一个近轨道和在 Poincaré 映射图中的一个点。

考虑定于如下的自控系统：

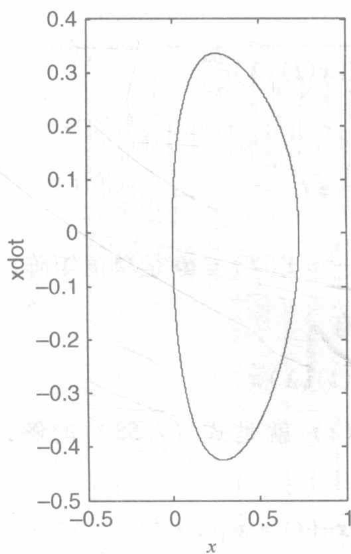
$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\lambda) \tag{2.48}$$

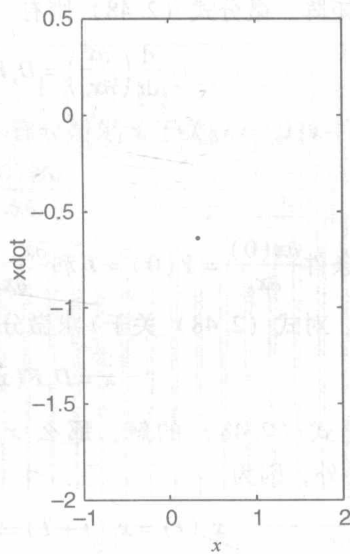
假设 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 最小周期 T 的函数，是式（2.48）的周期解。对 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 施加扰动 $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0(t)+\boldsymbol{y}(t) \tag{2.49}$$



a）





b）

图 2.2

a）在驱动频率 $\omega=100\pi$ 处的非线性模型的时间关系曲线图

b）图 a 中响应对应的相图和 Poincaré 映射图

且把它代入式（2.48），得出的关于 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 的泰勒级数展开式为

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=D_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0(t),\lambda)\boldsymbol{y}(t)+O(\|\boldsymbol{y}(t)\|) \tag{2.50}$$

当 n 个扰动施加到 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 时，由式（2.50）表示的 n 维线性系统有 n 个线性无关解 $\boldsymbol{y}_i(t)$。这 n 个解可以表示成一个 $n\times n$ 的矩阵：

$$\boldsymbol{Y}(t)=(\boldsymbol{y}_1(t),\boldsymbol{y}_2(t),\cdots,\boldsymbol{y}_n(t)) \tag{2.51}$$

下面的关系满足式（2.50）：

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=D_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0(t),\lambda)\boldsymbol{Y} \tag{2.52}$$

由于 $\boldsymbol{x}_0(t)=\boldsymbol{x}_0(t+T)$，故可以得出

$$D_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0(t),\lambda)=D_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0(t+T),\lambda) \tag{2.53}$$

若 $\boldsymbol{Y}(t)=[\boldsymbol{y}_1(t),\ \boldsymbol{y}_2(t),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n(t)]$，则 $\boldsymbol{Y}(t)=[\boldsymbol{y}_1(t+T),\ \boldsymbol{y}_2(t+T),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n(t+T)]$。因为式（2.50）至多有 n 个线性无关解，且 $\boldsymbol{Y}(t)$ 就是这样的 n 个线性无关解，则 $\boldsymbol{Y}(t+T)$ 一定是 $\boldsymbol{y}_1(t)$，$\boldsymbol{y}_2(t)$，$\cdots$，$\boldsymbol{y}_n(t)$ 的线性组合，因此意味着

$$\boldsymbol{Y}(t+T)=\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{\Phi} \tag{2.54}$$

矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 是一个从一个 $t=0$ 处的 n 维矢量到另一个 $t=T$ 处矢量的变换过程。假设初始状态 $\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，且式（2.54）中 $t=0$，有

$$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{Y}(T) \tag{2.55}$$

矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 被称作单值矩阵。之所以 $\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{I}$，是因为在 $t=0$ 处的解关于初始条件 $\boldsymbol{x}_0$ 的微分是一个单位矩阵。微分式（2.48）则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{x}_0}\right)=D_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t),\lambda)\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{x}_0} \tag{2.56}$$

而且对初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 关于 $\boldsymbol{x}_0$ 求微分有

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}(0)}{\partial\boldsymbol{x}_0}=\boldsymbol{I} \tag{2.57}$$

由于它的初始条件 $\dfrac{\partial\boldsymbol{x}(0)}{\partial\boldsymbol{x}_0}=\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{I}$ 和 $\dfrac{\partial\boldsymbol{x}(T)}{\partial\boldsymbol{x}_0}=\boldsymbol{Y}(T)=\boldsymbol{\Phi}$ 是单值矩阵，故式（2.57）是其初值问题。对式（2.48）关于 t 求微分有

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=D_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t),\lambda)\dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.58}$$

如果 $x(t)$ 是式（2.48）的解，那么 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 就是式（2.58）的解，因此也是式（2.50）的。另外，因为

$$\boldsymbol{x}_0(t)=\boldsymbol{x}_0(t+T)\Rightarrow\dot{\boldsymbol{x}}_0(t)=\dot{\boldsymbol{x}}_0(t+T) \tag{2.59}$$

当 $t=0$，有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\dot{\boldsymbol{x}}_0(T) \tag{2.60}$$

因为 $\dot{\boldsymbol{x}}_0(t)$ 是等式（2.50）的解，故它是 $\boldsymbol{y}_1(t)$，$\boldsymbol{y}_2(t)$，$\cdots$，$\boldsymbol{y}_n(t)$ 的线性组合，这样的形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(t)=\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c} \tag{2.61}$$

式中，$\boldsymbol{c}$ 是一个恒定的标量。求式（2.61）在 $t=0$ 和 $t=T$ 的值，得到

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(0)=\boldsymbol{Y}(0)\boldsymbol{c} \quad 和 \quad \dot{\boldsymbol{x}}_0(T)=\boldsymbol{Y}(T)\boldsymbol{c} \tag{2.62}$$

式（2.60）表明如下

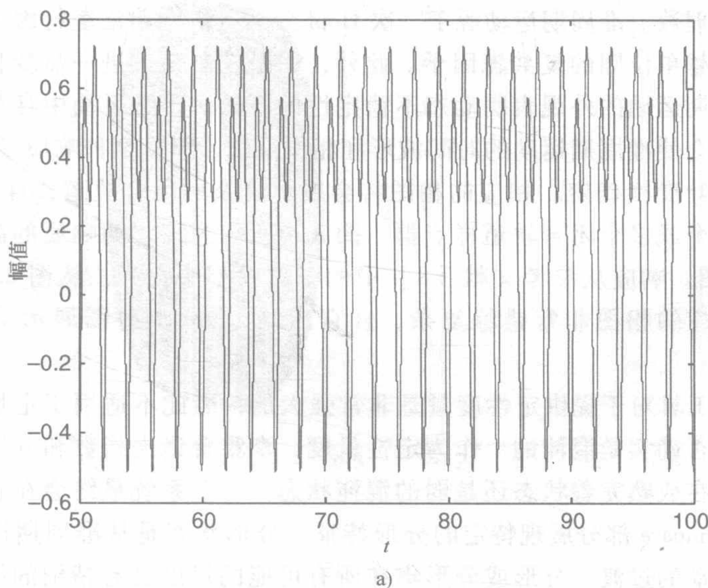
$$\boldsymbol{Y}(0)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{Y}(T)\boldsymbol{c} \tag{2.63}$$

由 $\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{I}$ 和式（2.55），式（2.63）可以写为

$$\boldsymbol{\Phi c}=\boldsymbol{c} \tag{2.64}$$

因此表明 1 是矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的对应于特征矢量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}_0(0)$ 的一个特征值。周期解的稳定性可由 $\boldsymbol{\Phi}$ 的其他被称作弗罗奎特因子的特征值确定。根据弗罗奎特理论，如果这些特征值的大小小于 1，周期解就是稳定的。如果它们有一个或多个的大小大于 1，周期解就是不稳定的且会发生分叉。分叉的类型由特征值在单位圆以外的表现方式确定。

如果允许控制参数变化，那么周期运动可能会变得不稳定，这说明稳定性动态恶化且最终会导致混沌现象。倍周期、二次 Hopf 分叉、中断和危机是走向混沌的几条可能路径。倍周期是常见的一种途径，经过这种方式切削系统变得混沌[4,5,6]。当控制参数缓慢变化，有一个弗罗奎特因子从 -1 走出单位圆，倍周期分叉将会发生。这是 Poincaré 部分描述的两点。另外，二分频分叉会在控制参数越来越小的间隔内发生，且混沌会在超出图 2.1 临界值之外发生。图 2.3 展现了参考文献［7］中非线性转子动态响应的时间波形、相图和 Poincaré 映射图。图 2.3b 说明它相应的 Poincaré 映射图中有两个闭合轨道和两个点。



a)

图　2.3

a）在驱动频率 $\omega=200\pi$ 处的非线性模型的时间关系曲线图

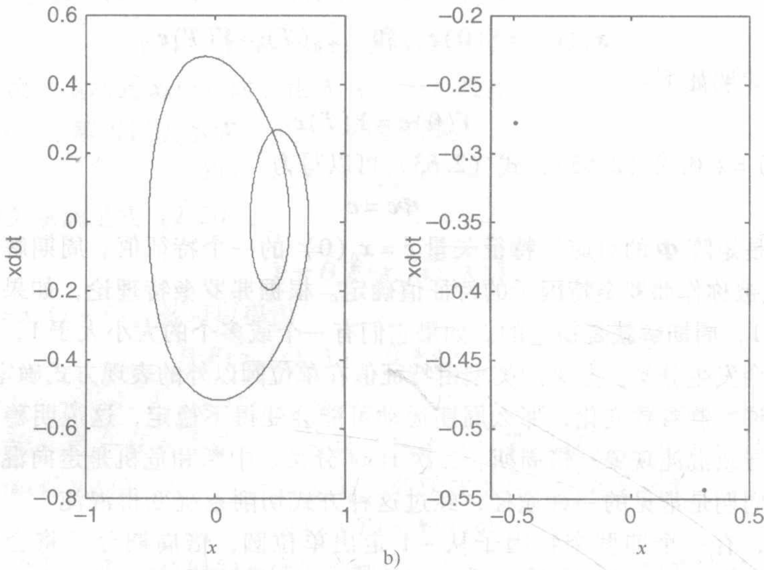


图　2.3（续）

b）图 a 中响应对应的相图和 Poincaré 映射图

准周期运动是一个动态解，有两个或多个不能通约的频率分量，即两个频率的比值是一个无理数。准周期运动源于二次 Hopf 分叉。依据弗洛奎特因子，Hopf 分叉有两个同时穿越单位圆的复共轭因子。此外，如果控制参数进一步变化，运动会变得混沌。准周期运动的外观表明动态不稳定性的开始。尽管运动中存在很多不能通约的频率必然会使准周期运动的时间波形和相图混乱，但是这种响应可以用 Poincaré 映射图和傅里叶变换确定。相应的相图将会展示复杂的闭合轨道，且 Poincaré 映射图将会包含一个或多个闭合轨道样点群。图 2.4 所示为该周期响应的波形、相图和 Poincaré 映射图。响应从参考文献［8］中的时滞模型中得到。从图 2.4b 中可以看出，准周期相应的相图非常错综复杂，且它的 Poincaré 映射图展示了一个封闭点序列。

这些图形工具对于提供定性度量是非常强大的，因此不适用于定量确立一个不确定的响应是否确实是混沌的。作为定性量度，李雅普诺夫指数和分形维数被用来确定运动是处在成熟完善状态还是弱的混沌状态。一些系统最终会在它们受到连续动态恶化的 Poincaré 部分展现特定的分形特征。分形状态是从准周期运动状态或倍周期向混沌运动的过渡。分形或分形集在所有可能的尺度具有精细的细节，且在不同的尺度具有自相似的性质。然而，还没有一个普遍的定义来定义分形。分形维数是 n 维空间的一组点的定量属性，随着点数的增大[9]，它用来量度点填充子空间所达到的范围。无限的分形点集的分形维数一般是非整数且小于 n。分形响应的相图特征为有许多紧密相连的、很难辨别的闭合轨道。相对揭示分形响应的物理本质的

相图，Poincaré 映射图通常被认为是更好的选择。图 2.5 所示为参考文献［4］中分形响应的相图和 Poincaré 映射图，其中研究了裂缝引起的转子动态非线性，从中能清楚地看到分形结构。

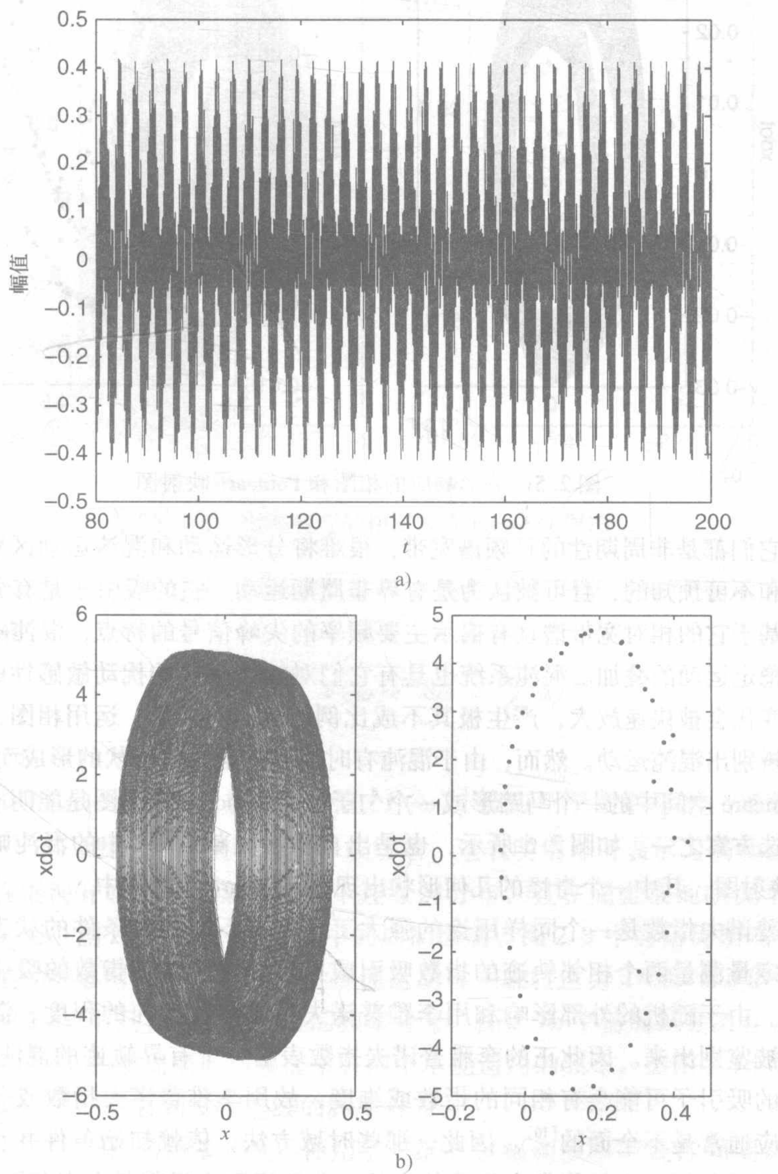


图　2.4

a）非线性时滞模型的时间关系曲线图

b）图 a 中响应对应的相图和 Poincaré 映射图

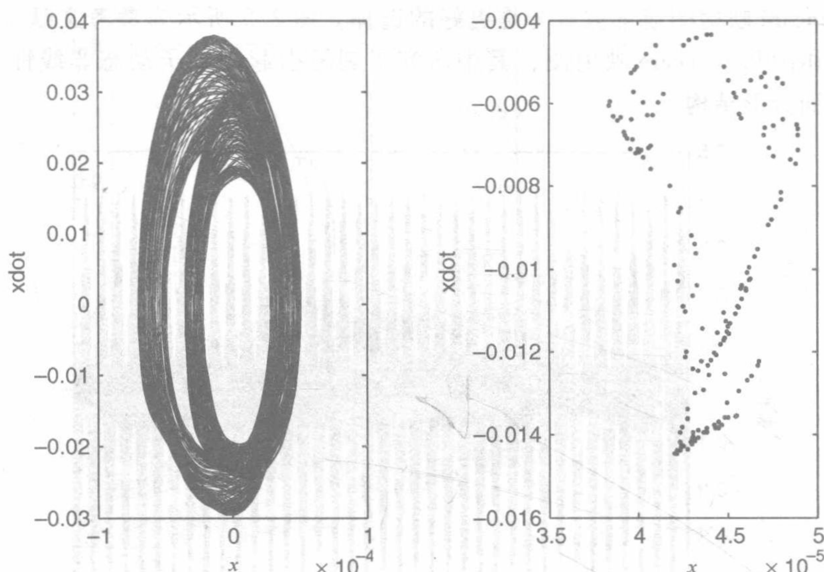


图 2.5　分形响应的相图和 Poincaré 映射图

因为它们都是非周期性的且频谱宽带，很难将分形运动和混沌运动区别开来。混沌是不规则和不可预知的，且可被认为是有界非周期运动，它的吸引子是有分形维数的几何对象。基于它的相对宽带谱且有揭示主要频率的尖峰信号的特点，混沌响应也可认为是大量不稳定运动的叠加。混沌系统也具有它们对初始条件的扰动敏感性的特征，即输入的极小变化会被快速放大，产生极其不成比例的输出。果然，运用相图，在很多类分形中很难辨别出混沌运动。然而，由于混沌有时因有特定几何形状的形成而很容易确定，例如，Poincaré 空间中的一个马蹄形或一个勺子形，Poincaré 映射图是能明确地鉴定混沌响应的可选方案之一。如图 2.6 所示，也是出自参考文献 [4] 中的混沌响应的相图和 Poincaré 映射图，其中一个奇怪的几何形状出现在 Poincaré 映射图中。

李雅普诺夫指数是一个同样用途的强大工具，在不同初始条件的状态空间中，它可以及时定量测量两个相邻轨迹的指数吸引或排斥。它能对其指数的吸引或排斥进行定量测量。由于随机的外部影响和用李雅普诺夫指数评价混沌的程度，混沌能从嘈杂的运动中被鉴别出来。因此正的李雅普诺夫指数表明一个有界轨迹的混沌运动。然而，由于不同的吸引子可能会有相同的指数或维度，故用李雅普诺夫指数或分形维数来描述混沌响应通常是不全面的[10]。因此，那些时域方法，依赖初始条件并且也要求所有数据都可用于分析，它们依靠有经验的人的专业知识和主观判断力来获取明智的判断。

2.5.1　傅里叶分析

分叉是从一个状态到另一个状态的运动过渡，伴随之的是新模式的出现、旧模式的消失或者两者兼有。因此，周期、倍周期、准周期和混沌运动，这些不同的状态可以通过它们各自的频谱很容易鉴别出来。这是基于傅里叶的方法通常被用于分

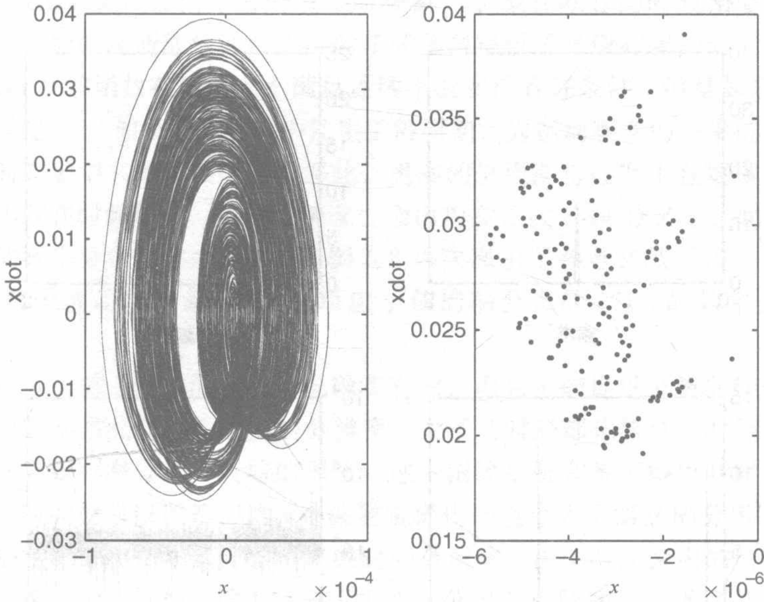


图2.6　混沌响应的相图和Poincaré映射图

叉鉴定的原因之一。方法中做出的假设是一个周期或非周期信号可表示为正弦或余弦函数的合成。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\omega_j t} \tag{2.65}$$

式中，$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$。

由于变换$F(\omega)$通常很复杂，绝对值$|F(\omega)|$被应用于图形显示。当运动是周期或准周期，$|F(\omega)|$展示一组狭窄的尖峰或线条，这表明信号可表示为调和函数的离散集。然而，在混沌开始的附近会出现一个连续的分布，且在完全混沌状况下连续频谱会主宰离散尖峰。图2.7所示为图2.2中的周期运动、图2.3中的倍周期响应、图2.4中的准周期运动和参考文献［11］中的混沌运动（主轴转速为2700r/min的铣削数据）的频谱。在图2.7a中只有一个周期解的频率分量。图2.7b中倍周期分叉有二分频的现象。在图2.7c所示的准周期运动频谱中有两个不能通约的频率。如图2.7d所示，混沌运动有宽带谱，其中会看到发生连续的频率分布。

然而，式（2.65）的傅里叶变换使用了一组有恒幅和恒频的线性周期调和函数来代表非线性和非周期信号，这显然与对非线性非平稳信号的理解有悖。原因很明显，傅里叶变换是线性的且其具有稳定的调和函数分析功能，故对于证明非线性的时变序列[12]，谱域方法是不可行的。那么，当非线性运动或分叉发生或处于过渡时期的时候，用来描述非线性运动状态和确定分叉的一种可行办法所要求的基本属性是什么？因为频域方法完全丢失了时域信息，而时域信息对实时检测分叉的发生和状态的变化是必不可少的，故许多研究工作一直致力于开发一种方法，可以同时检测到在时域和

频域的细微变化。

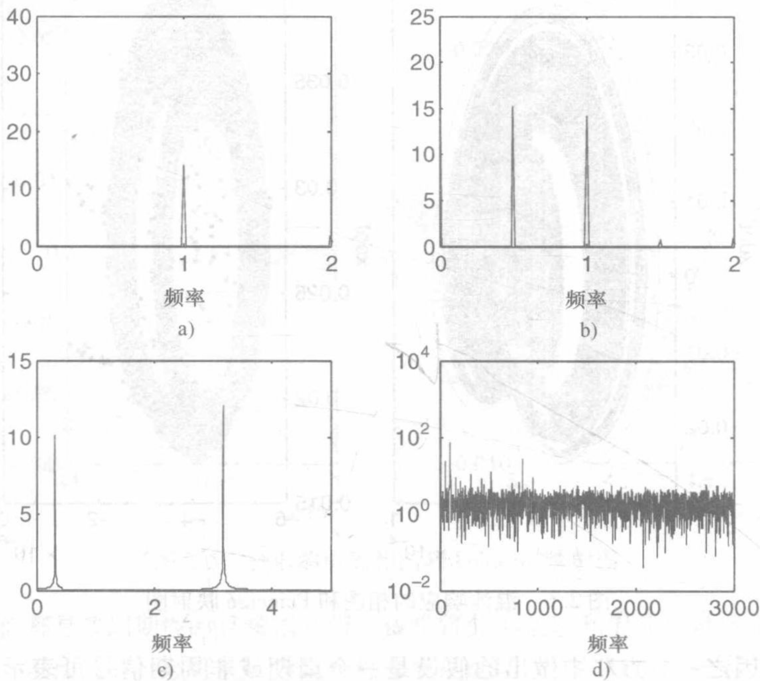


图 2.7

a）周期响应的频谱 b）倍周期响应的频谱 c）准周期响应的频谱 d）混沌运动的频谱

2.5.2 小波分析

检测和识别动态变化及分叉的一个好方法是及时监测光谱变化，因此意味着在时域和频域描述一个信号。时频分析的目的是描述一个信号的光谱成分是如何发展的及建立理解时光谱所需要的物理和数学本质。应用于动态非线性分析和故障检测[4,13,14]的各种时频分析方法中，有短时傅里叶变换（STFT）、小波分析、维格纳威利分布(WVD)、Choi-Williams 方法、Born-Jordan 分布[15,16]。由于双线性方法的互谱项，如 WVD，可以模糊时频分布的分辨率，因此所研究系统的物理本质、包含小波变换的线性数学变换已被广泛运用于非线性时频分析[15,16]。

关于一些分析小波 $\psi(t)$ 的 $f(t)$ 函数的连续小波变换被定义为

$$W_{\psi}f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t \tag{2.66}$$

式中，a 和 b 分别被称为增强和变换因子。

在下面等式中给出了 Gabor 小波。它是一个与加窗高斯函数相乘的复平面正弦曲线。

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\exp\left(-\frac{t^2}{2\gamma^2}\right)(\cos t + i\sin t) \tag{2.67}$$

式中，γ 是正的常数。

Gabor 小波函数提供任何小波的最小时频窗[17]，故在联合的时频域中提供了非常高的分辨率。函数的高斯部分为可扩展的正弦函数提供了平滑有限的时间窗。需要注意的是，Gabor 小波函数在狭义上不满足连续小波变换容许条件，但是如果 γ 足够大，可以假设为满足[18]。如果动态系统中发生了倍周期，为扰动频率的一半的一个新频率将会出现在时频域中。如果系统继续恶化，更多的倍周期将会发生且更多低阶谐波频率分量将会出现在时频域中。类似的情况也会出现在二次 Hopf 分叉上，此处与扰动频率不能通约的频率分量会在之后出现。图 2.8 再次展示了参考文献［19］中的倍周期案例，在案例中扰动频率是 50Hz 且对应于倍周期分叉的 25Hz 的频率分量出现在 1.8s 处。

尽管时频分布对于一些简单的情况确实有效，但它不能提供分析非线性不稳定的信号及鉴别分叉和系统动态所需要的分辨率。为了及时局部化事件，时间窗宽度必须要窄，故必然导致频率分辨率较差的困境。这一困境是所有基于傅里叶时频分布所固有的。尽管其时间窗可以调整，然而小波通常提供一直令人不满意的分辨率[12]。所有基于傅里叶的时频方法都在低频有不良的时间分辨率。由于时间窗内的所有时间事件都平均在整个窗口中，例如，傅里叶方法不能区分出两个脉冲[20]。为了用小波定义一个局部变动，由于频率越高基本小波越集中，故必须找到高频范围内的结果。即使局部事件仅发生在低频区域，仍必须找到它对高频区域的作用，因此使得理解非线性、非稳定信号的任务更加困难。另外，由于它们都是基于傅里叶的且因此能有效地分析线性平稳信号，故上述提到的时频分析方法不适用于非线性不平稳的信号分析。用图 2.8 中的例子，假设分叉发生在频率范围高于 150Hz 处，新产生的频率将会被扰动频率和其他的频率掩盖，因此篡改了分叉的检测与鉴别。由于在解决具有典型非周期和宽带特性的混沌响应和定位分叉发生的时间点时，其为低时频分辨率，这种情况下结果至多就是不确凿。图 2.9 展示了在主轴转速为 2700r/min 时得到的铣削颤动响应的时频

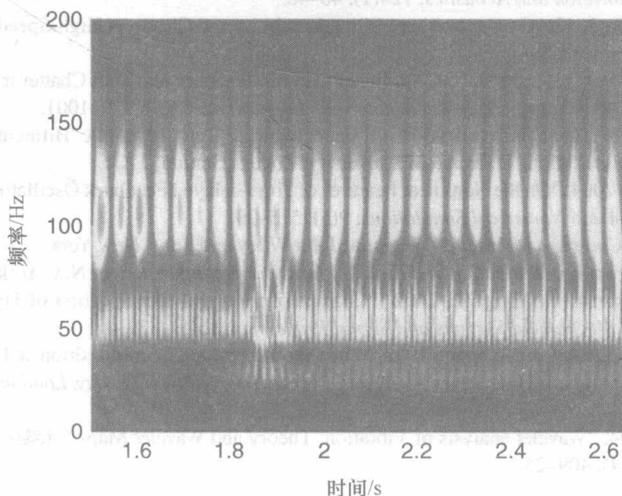


图 2.8　倍周期信号的 Gabor 小波变换

分布[11]。由于基于傅里叶的时间窗口固有的平均效应，所有模式都混合在一起，只有扰动频率明确可见。其他频率不可以辨出，且没有分叉可以检测或鉴定出。

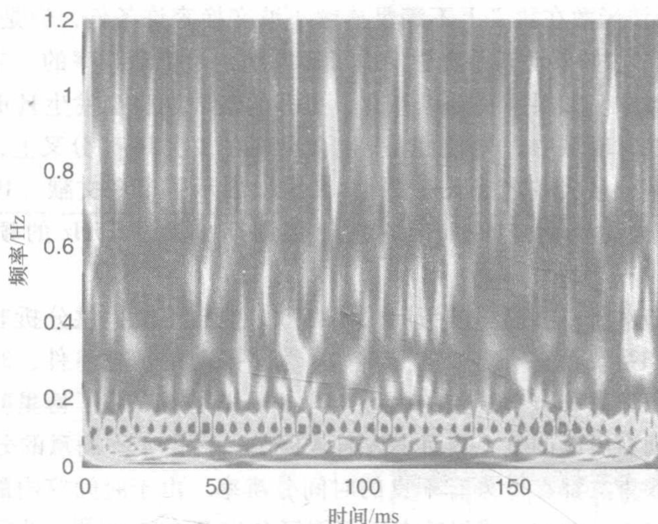


图 2.9　经历铣削颤动的信号的 Gabor 小波变换

参考文献

[1] Nayfeh, A.H., Balachandran, B., 1994, *Applied Nonlinear Dynamics*, John Wiley and Sons, New York.

[2] Moon, F.C., 1987, *Chaotic Vibration: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, John Wiley and Sons, New York.

[3] Thompson, J.M.T., Stewart, H.B., 2001, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons, New York.

[4] Yang, B., Suh, C. S., Chan, A. K., 2002, "Characterization and Detection of Crack-Induced Rotary Instability," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 124(1), 40–48.

[5] Liu, M.-K., Suh, C.S., 2012, "On Controlling Milling Instability and Chatter at High-Speed," *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 1(1), 59–72.

[6] Dassanayake, A.V., Suh, C.S., 2008, "On Nonlinear Cutting Response and Tool Chatter in Turning Operation," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 13(5), 979–1001.

[7] Yang, B., 2003, On The Characterization of Fault-Induced Rotor-Dynamic Bifurcations and Nonlinear Responses, Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, College Station, TX.

[8] Yang, B., Suh, C. S., 2004, "On the Nonlinear Features of Time-delayed Feedback Oscillators," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 9(5), 515–29.

[9] Moon, F. C., 1992, *Chaotic and Fractal Dynamics*, John Wiley and Sons, New York.

[10] Seydel, R., 1994, *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Springer-Verlag, New York.

[11] Suh, C. S., Khurjekar, P. P., Yang, B., 2002, "Characterization and Identification of Dynamic Instability in Milling Operation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), 829–48.

[12] Huang, N.E., Shen, Z., Long, S. R., *et al.*, 1998, "The Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectrum for Nonlinear and Nonstationary Time Series Analysis," *Proceedings of Royal Society, London Series A*, 454(1971), 903–95.

[13] Newland, N.E., 1994, "Wavelet analysis of Vibration: Theory and Wavelet Maps," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 116(4), 409–25.

[14] Gaberson, H. A., 2002, "The Use of Wavelets for Analyzing Transient Machinery Vibration," *Sound and Vibration*, September 2002, 12–17.

[15] Cohen, L., 1995, *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey.

[16] Qian, S., Chen, D., 1996, *Joint Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey.

[17] Chui, C.K., 1992, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, San Diego, CA.

[18] Kishmoto, K., Inoue, H., Hamada, M., Shibuya, T., 1995, "Time Frequency Analysis of Dispersive Wave by Means of Wavelet Transform," *ASME Journal of Applied Mechanics*, 62(4), 841–46.

[19] Yang, B., Suh, C. S., 2004, "On the Characteristics and Interpretation of Bifurcation and Nonlinear Dynamic Response," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 126(4), 574–79.

[20] Rioul, O., Vetterli, M., 1991, "Wavelet and Signal Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, 8(1), 14–38.

第 3 章　自适应滤波器和滤波-x LMS 算法

式（2.32）定义的数字滤波是使用时不变滤波器 $h(n)$ 修改输入序列 $x(n)$，从而生成某些所需特性的输出序列 $y(n)$ 的线性操作。当定义 $h(n)$ 的时域幅度和频谱响应的滤波系数是随时间变化且根据一组计算规则来进行调整时，该滤波器具有可设计性和适应性。当变形操作所需的频谱响应不可先验时，通常采用自适应滤波器来预期情况。该自适应滤波器特别适用于预调节随机非稳定的输入。这特别适用于具有非线性的动力系统，该系统的响应是典型的非周期和时变的。关于时频控制振动的自适应滤波的基本特征将在本章中讲解。为了确定滤波-x 最小方均（FXLMS）控制算法的工作原理，这是时频控制的一个重要组成部分，必须首先引入最小方均误差准则、维纳滤波器和 LMS 自适应滤波算法的基本原理。

3.1　离散时间 FIR 维纳滤波器

最佳的维纳滤波器采用自适应滤波器的原理解开了维纳—霍普夫积分方程[1]。图 3.1 所示 FIR 自适应滤波器的示意图中，激励序列 $\boldsymbol{x}(n)$ 被滤波器 $W(z)$ 改变。滤波器 $W(z)$ 由有限个滤波系数 w_i确定，其中下标 i 表示顺序或者该滤波器长度的整数。误差信号 $e(n)$ 为系统输出 $y(n)$ 和理想响应 $d(n)$ 之间的差值，即 $e(n)=d(n)-y(n)$。维纳滤波器的原理指出可以选择一组最优系数 w_i，使得误差信号$e(n)$ 最小。线性时不变维纳滤波器的系数可以随着既定算法的调整而及时适应$x(n)$ 的变化状态。在实际操作中，自适应算法的目的是优化 $e(n)$ 的方均根值来更新滤波系数 w_i，即滤波器系数。w_i在每个 i 编号样本中逐步改变。虽然适应过程是自动的，但它需要使用一个非线性数学回归方程来优化误差信号。该方程是一个多变量的函数，它的次元由 i 滤波器的顺序决定。

3.1.1　性能检测

图 3.1 中的自适应 FIR 滤波器系统定义了滤波器输出是由滤波器输入的卷积与冲激响应决定的，即

$$y(n)=X(z)W(z)=\sum_{k=1}^{m}\omega_k(n)x(n-k-1) \tag{3.1}$$

式中，$X(z)$ 和 $W(z)$ 分别表示序列 $x(n)$ 和自适应滤波器的 z 变换。

在原理图中，z^{-i}表示 i 编号样本的采样间隔的延迟。性能指标 $J(\boldsymbol{w})$ 用来衡量最小化的效果，即

$$J(\boldsymbol{w})=E[e^2(n)]=E[e(n)\cdot\bar{e}(n)] \tag{3.2}$$

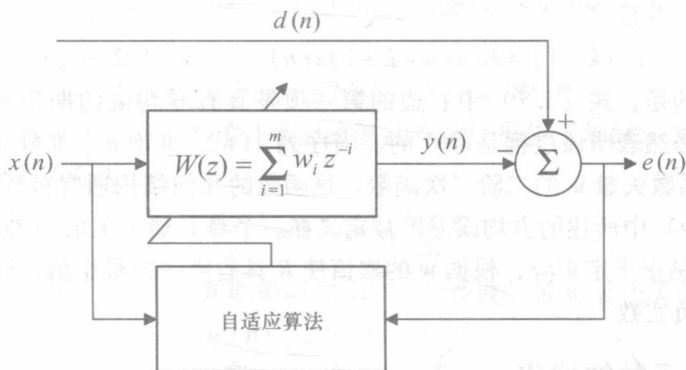


图 3.1　自适应滤波器的示意图

上述的自适应滤波器系数 $\boldsymbol{w}$ 矢量共有 m 个元素，即

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m) \tag{3.3}$$

因此，w_i的最佳取值是使用最小均方误差法检测最小化函数 $J(\boldsymbol{w})$ 得到的。

另外，式（3.1）可以使用相对应的矢量表示。

$$\begin{aligned} y(n) &= \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(n) \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{w} \end{aligned} \tag{3.4}$$

假定 $\boldsymbol{w}$ 是一个已知序列，实际输出和期望响应之间的估计误差为

$$e(n) = d(n) - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(n) \tag{3.5}$$

性能函数可使用估计误差来展开。

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{w}) &= E[e^2(n)] \\ &= E[(d(n) - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(n)) \cdot (d(n) - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(n))] \\ &= E[d^2(n)] - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}E[\boldsymbol{x}(n)d(n)] - E[d(n)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)]\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)]\boldsymbol{w} \end{aligned} \tag{3.6}$$

由上可见，因为第二项和第三项是相等的，所以上述式子也可表达成

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{w}) &= E[d^2(n)] - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} \\ &= E[d^2(n)] - 2\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，矢量 $\boldsymbol{p}$ 是与输入量 $\boldsymbol{x}(n)$和期望响应 $d(n)$ 相关联的。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= E[\boldsymbol{x}(n)d(n)] \\ &= (p(0), p(1), \cdots, p(m-1))^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

各元素 p 作为一个相关联函数，即

$$p(k-1) = E[\boldsymbol{x}(n-k+1)d(n)] \qquad k = 1, 2, \cdots, 3 \tag{3.9}$$

$\boldsymbol{R}$ 是输入序列 $\boldsymbol{x}(n)$ 的自相关矩阵，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)] \\ &= \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,m} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & r_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m,1} & r_{m,2} & \cdots & r_{m,m} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.10}$$

式中，$r_{i,j}=r_{j,i}$，并且

$$r_{i,j}(k-1)=E[x(n-k+1)x(n)] \qquad k=1,2,\cdots,m \tag{3.11}$$

值得注意的是，式（3.7）中右边的第一项是具有零均值的期望响应 $d(n)$ 的方差。这种情况必然表明该过程是静止的。当序列 $x(n)$ 和 $d(n)$ 都静止时，性能指标 $J(\boldsymbol{w})$ 是滤波系数矢量 $\boldsymbol{w}$ 的二阶二次函数。该函数的几何结构通常被称为误差性能面。换句话说，$J(\boldsymbol{w})$ 中所述的方均误差值被定义在一个具有最小值的 m 维空间中。最后，自相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是正半定矩阵，根据 $\boldsymbol{w}$ 的取值使 $\boldsymbol{R}$ 具有唯一的最小值，即 $\boldsymbol{R}$ 的所有特征值都必须是非负实数[2]。

3.1.2 性能函数的优化

从均方意义上来说，性能函数 $J(\boldsymbol{w})$ 被最小化时，在合成 FIR 滤波器的操作中，其相应的 $\boldsymbol{w}$ 可以取到最佳值，保持误差 $e(n)=d(n)-y(n)$ 较小。为了获得最佳的滤波系数 $\boldsymbol{w}_0$，$J(\boldsymbol{w})$ 的梯度需表示为

$$\nabla J(\boldsymbol{w})=\frac{\partial J(\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}=0 \tag{3.12}$$

式中，梯度算子∇为

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\ \frac{\partial}{\partial w_2}\ \cdots\ \frac{\partial}{\partial w_m}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3.13}$$

由于

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}=\frac{\partial(E[d^2(n)])}{\partial \boldsymbol{w}}-\frac{\partial(2\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}+\frac{\partial(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}=0 \tag{3.14}$$

且

$$\frac{\partial(E[d^2(n)])}{\partial \boldsymbol{w}}=0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial(2\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}=2\boldsymbol{p} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}=2\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} \tag{3.17}$$

因此，满足式（3.14）的最佳 $\boldsymbol{w}_0$ 具有如下性质

$$-2\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_0=0 \tag{3.18}$$

或

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{p} \tag{3.19}$$

被称为维纳—霍普夫方程。式（3.19）也可以表示为

$$\sum_{j=1}^{m} r_{i,j}\omega_j=p_i, i=1,2,\cdots,m \tag{3.20}$$

假设存在 $\boldsymbol{R}^{-1}$，最佳矢量 $\boldsymbol{w}_0$ 是通过互相关矢量 $\boldsymbol{p}$ 和自相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 决定的。

$$\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p} \tag{3.21}$$

$J(\boldsymbol{w})$ 最小值为

$$J_{\min}(\boldsymbol{w}) = J(\boldsymbol{w}_0) = E[d^2(n)] - 2\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_0 \tag{3.22}$$

或

$$J_{\min}(\boldsymbol{w}) = J(\boldsymbol{w}_0) = E[d^2(n)] - \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{P} \tag{3.23}$$

式（3.22）和式（3.23）给最佳维纳滤波器的设计提供了思路。其他的替代方案可以首先考虑如下的方法：

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{w})}{\partial w_i} = E\left[2e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial w_i}\right] \tag{3.24}$$

考虑到 $e(n) = d(n) - y(n)$ 和期望响应 $d(n)$ 与滤波矢量 $\boldsymbol{w}$ 是无关的，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial e(n)}{\partial w_i} &= \frac{\partial d(n)}{\partial w_i} - \frac{\partial y(n)}{\partial w_i} \\ &= -\frac{\partial y(n)}{\partial w_i} \\ &= -x(n-i)\end{aligned} \tag{3.25}$$

因此，式（3.24）也可表示为

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{w})}{\partial w_i} = -2E[e(n)x(n-i)], \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{3.26}$$

当性能函数被最小化时，$\boldsymbol{w}_0$ 的取值也就确定了，$e_0(n)$ 即是所述情况下的估计误差。

$$\left.\frac{\partial J(\boldsymbol{w})}{\partial w_i}\right|_{\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_0} = -2E[e_0(n)x(n-i)] = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{3.27}$$

利用式（3.1）可以得到如下证明：

$$E[e_0(n)y_0(n)] = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{3.28}$$

式中，当 $\frac{\partial J(\boldsymbol{w})}{\partial w_i} = 0$ 时，滤波器的最优输出取值为 y_0。上述两个方程说明，在方均误差检测中，当维纳滤波器系数设置为它们的最佳值时，输入序列和优化的维纳滤波器的输出都与误差估计无关。$x(n-i)$ 和 $y_0(n)$ 与 $e_0(n)$ 正交。在更新自适应滤波器的非平稳输入条件下，借助正交特性可以实现更好的计算效率。

3.2　梯度下降优化法

在每一次滤波过程和误差估计操作中，最优解 $\boldsymbol{w}_0$ 是不断更新的，这就需要利用如式（3.19）所示的维纳—霍普夫方程求解。但是，当输入数据速率高且滤波器长度（滤波系数的数值）比较大时，上述求解法是复杂的且计算成本高。数学优化法，如梯度下降法，是一种常用于求解误差性能面中的全局最小值的方法，它是解决自适应维纳滤波器问题的最佳解决法[3]。梯度下降法也称为最速下降法，它是一阶的优化方法。该方法的解决方案是搜索，并按照其负梯度最陡方向进行检测。这是一种逐步进行迭代计算直到达到全局最小值的方法，在最小值点处的解矢量是零梯度[4]。

为了说明迭代过程，需要考虑函数 $f(\boldsymbol{x})$。目的是在任意一点 $\boldsymbol{x}_0$ 附近找到局部极

值。其方法是通过沿着函数 $f(\boldsymbol{x})$ 减小速率最快的方向进行检测，这与 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 所定义的方向相反。

$$\boldsymbol{x}_{i+1}=\boldsymbol{x}_i-\mu_i\nabla f(\boldsymbol{x}_i) \tag{3.29}$$

式中，μ_i 是恒定的实数，其决定了从当前位置 $\boldsymbol{x}_i$ 到下一个位置 $\boldsymbol{x}_{i+1}$ 的步长。

当然，μ_i 的取值不是任意的。因为下行路径定向梯度为零的 $\boldsymbol{x}_i$ 处有最小的函数值，这要求

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_{i+1})}{\mathrm{d}\mu_i}&=0 \\ &=(\nabla f(\boldsymbol{x}_{i+1}))^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{i+1}}{\mathrm{d}\mu_i}\right) \\ &=(\nabla f(\boldsymbol{x}_{i+1}))^{\mathrm{T}}[\nabla f(\boldsymbol{x}_i)]\end{aligned} \tag{3.30}$$

式（3.30）决定了 μ_i 的取值应该遵循 $\nabla f(\boldsymbol{x}_{i+1})$ 和 $\nabla f(\boldsymbol{x}_i)$ 相互正交的原则，以确保解决方案的稳定性和收敛性。

上述最陡梯度法可以参考性能函数 $J(\boldsymbol{w})$ 在 $\boldsymbol{w}_0$ 处求解最佳滤波矢量的方案。第 n 次迭代的迭代求解方法与式（3.29）类似，

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)-\frac{\mu}{2}\frac{\partial J(\boldsymbol{w})}{\partial\boldsymbol{w}}\bigg|_{\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(n)} \tag{3.31}$$

根据式（3.14）~式（3.18），得到

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{w})}{\partial\boldsymbol{w}}\bigg|_{\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(n)}=-2\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}(n) \tag{3.32}$$

在递归方式求解的过程中，利用最速下降法可以得到

$$\boldsymbol{w}(n+1)=\boldsymbol{w}(n)-\mu[-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}(n)] \tag{3.33}$$

根据式（3.30）计算所得，上述方程中的 μ 是每次迭代步骤中控制所述滤波器矢量的增量估计的步长参数。

式（3.33）明确表示，除了 μ 和 $\boldsymbol{R}$，输入矢量 $\boldsymbol{x}(n)$ 的自相关矩阵对控制迭代求解算法的稳定性也起着重要作用。如何看待 μ 和 $\boldsymbol{R}$ 对稳定性能的影响，需要考虑到如下的误差矢量：

$$\boldsymbol{e}_w(n)=\boldsymbol{w}(n)-\boldsymbol{w}_0 \tag{3.34}$$

在两个连续的迭代计算中把矢量运用到式（3.33）中，可以得到

$$\boldsymbol{e}_w(n+1)=(\boldsymbol{I}-\mu\boldsymbol{R})\boldsymbol{e}_w(n) \tag{3.35}$$

由于 $\boldsymbol{R}$ 是半正定且对称的实数矩阵，$\boldsymbol{R}$ 存在下列的相似变换：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3.36}$$

式中，$\boldsymbol{\Lambda}$ 是一个对角矩阵，其对角线项的数值为 λ_i 等于矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的特征值。

单位矩阵 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$，其行矩阵的特征矢量对应于矩阵 $\boldsymbol{R}$ 特征值。因此，式（3.35）也可以表示成

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_w(n+1)=(\boldsymbol{I}-\mu\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_w(n) \tag{3.37}$$

需要注意的是，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_w(n)$ 是 $\boldsymbol{e}_w$ 通过 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 的转换而得到的，具有以下特性

$$s(n)=Q^{T}e_{w}(n)=Q^{T}[w(n)-w_{0}] \tag{3.38}$$

$$s(n+1)=(I-\mu\Lambda)s(n) \tag{3.39}$$

矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的所有特征值都是正实数，这就确保了式（3.39）中由误差矢量 $e_w(n)$ 变换得到的一个响应 $s(n)$ 不会存在数值振荡。上述的式（3.39）也可用矢量分量表示，其中 λ_k 是矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的第 k 个特征值，即

$$s_k(n+1)=(1-\mu\lambda_k)s_k(n) \tag{3.40}$$

上式中的 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，其中 m 是该滤波器的长度。通过确定一个初始值 $s_k(0)$，第 n 次迭代后得到的表达式可简单地表示为

$$s_k(n)=(1-\mu\lambda_k)^n s_k(0) \tag{3.41}$$

式（3.41）的收敛性可直接衡量最速下降法的稳定性。并且，式（3.41）的收敛条件表达为

$$-1<(1-\mu\lambda_k)<1 \tag{3.42}$$

当迭代次数趋近无穷大时，估计误差变换所得的 $s_k(n)$ 被视为趋近于零，使得 $w(n)$ 近似为 w_0，从而得到最优解。若要使式（3.42）达到稳定，μ 需要满足下列的约束条件：

$$0<\mu<\frac{2}{\lambda_{\max}} \tag{3.43}$$

式中，$\lambda_{\max}$ 是自相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的最大特征值。

3.3　最小均方算法

上一节所介绍的梯度下降法是假设通过迭代一个定义良好的性能函数来搜索最佳求解路径。在实际情况下，这个函数是不可用的。方向梯度的方法必须通过访问每一次的迭代中有限个数据来进行估计。最小均方（LMS）法和其许多的变换式被广泛运用于在均方意义上的输入数据处理和根据最陡梯度法来进行滤波器矢量的更新计算[5]。

考虑到性能函数的瞬时粗略估算经典 LMS 算法是一种随机执行最速梯度法的算法。它是通过估计性能函数的梯度值 $\nabla J(w)\big|_{w(n)}=-2p+2Rw(n)$ 来实现目标的，其中包括自相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和互相关矢量 $\boldsymbol{p}$ 的瞬时粗略估算。

$$\hat{R}(n)=x(n)x^{T}(n) \tag{3.44}$$

$$\hat{p}(n)=d(n)x(n) \tag{3.45}$$

式中，上述表达式中的上标表示的是相应的瞬时粗略估算。性能函数梯度的瞬时粗略估算是由两个瞬态估算方程决定的，即式（3.44）和式（3.45）。

$$\hat{\nabla}J(w)\big|_{w(n)}=-2d(n)x(n)+2x(n)x^{T}(n)w(n) \tag{3.46}$$

将式（3.46）带入最陡梯度递归方程即式（3.33）中，可以得到一个新的递归表达式

$$\hat{w}(n+1)=\hat{w}(n)+\mu x(n)[d(n)-x^{T}(n)\hat{w}(n)] \tag{3.47}$$

在实际中，LMS 递归表达式（3.47）是按顺序执行如下的方程组，从而得到

$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)$的瞬态估算。

$$\hat{e}(n)=d(n)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\boldsymbol{w}}(n) \tag{3.48}$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)=\hat{\boldsymbol{w}}(n)+\mu\boldsymbol{x}(n)\hat{e}(n) \tag{3.49}$$

式中，估计误差$\hat{e}(n)$ 是由当前估计值$\hat{\boldsymbol{w}}(n)$ 决定的。当估计误差是显著时，由于不符合设定公差，根据式（3.49），$\mu\boldsymbol{x}(n)\hat{e}(n)$ 是利用$\hat{e}(n)$ 来纠正$\hat{\boldsymbol{w}}(n)$ 的当前估计值，从而估算并改正$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)$ 的值来决定的。当不需要自相关矩阵时，式（3.47）~式（3.49）中所给出的 LMS 算法不会执行矩阵的逆变换。

Haykin[2]说明若式（3.7）中表述的滤波系数 $E[d^2(n)]$ 的方差是发散时，且仅仅存在均方误差收敛的条件，这不足以保证 LMS 算法具有稳定性。此时，还需要考虑以下内容：

$$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)-\hat{\boldsymbol{w}}(n)=\mu\boldsymbol{x}(n)\hat{e}(n) \tag{3.50}$$

即使自适应步长 μ 取值适当，且估计值$\hat{\boldsymbol{w}}(n)$ 接近于最优系数矢量 $\boldsymbol{w}_0$，即$\hat{\boldsymbol{w}}(n)\approx\boldsymbol{w}_0$，但是由于$\boldsymbol{x}(n)\hat{e}(n)$ 是随机值，因此滤波器的权重数值也不可能达到理想的零状态，即

$$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)-\boldsymbol{w}_0=\mu\boldsymbol{x}(n)\hat{e}(n)\neq\boldsymbol{0} \tag{3.51}$$

从式（3.51）可见，$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)$ 不可能与 $\boldsymbol{w}_0$ 相等。事实上，它会一直在 $\boldsymbol{w}_0$ 附近振荡。

假设序列 $d(n)$ 为参考序列，其含有独立于噪声序列 $\varepsilon(n)$ 的零均值，即

$$d(n)=(\boldsymbol{w}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(n)+\varepsilon(n) \tag{3.52}$$

所以当$\hat{\boldsymbol{w}}(n)=\boldsymbol{w}_0$时，式（3.5）中的估计误差表示为

$$e(n)=(\boldsymbol{w}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(n)+\varepsilon(n)-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(n) \tag{3.53}$$

因此，相应的方均值是

$$E[e^2(n)]=E[\varepsilon^2(n)]=J_{\min}(\boldsymbol{w}) \tag{3.54}$$

但是，在实际计算中$\hat{\boldsymbol{w}}(n)\neq\boldsymbol{w}_0$，所以从式（3.54）中可以得到如下结论：

$$E[e^2(n)]>J_{\min}(\boldsymbol{w}) \tag{3.55}$$

由于在最佳设置中，测量权重矢量会被误调整。其误调整因子的定义为

$$M=\frac{E[e^2(n)]-J_{\min}(\boldsymbol{w})}{J_{\min}(\boldsymbol{w})} \tag{3.56}$$

调整因子的等效表达式是由噪声的协方差矩阵推导而来[6]：

$$M=\frac{\mu\ \mathrm{trace}(\boldsymbol{R})}{1-\mu\mathrm{trace}(\boldsymbol{R})} \tag{3.57}$$

使用式（3.56）和式（3.57），可以将变量控制在有限的范围内。通过选择一定的自适应步长 μ，实现 M 的期望值，从而使最佳的维纳滤波器的误差达到指定值内。

3.4　滤波-x LMS 算法

如图 3.1 中所描述的，工程应用中的控制器广泛采用运用 LMS 算法的自适应滤波器。例如，自适应滤波器是有源噪声控制的主要部分，应用于声音干扰的消除或者声音质量的补偿，或上述两者兼有。现代智能结构和桥梁设计也采用 LMS 型主动控制器，来抵消地震振动带来的不利影响。自适应滤波器的配置通常被运用于类似于图 3.2 前馈方案的实际构造中。其中，滤波器可跟踪系统变化估计输入信号，通过修正滤波器权重适应响应，并且产生适当的补偿，从而实施设备控制。

原理图的构造是一种系统的标识，其中基于 LMS 型的自适应滤波器 $W(z)$ 估算了未知设备的响应。该设备通过输入序列 $x(n)$ 的激励，采用传递函数 $P(z)$ 进行计算。响应的估算是由函数 $F(z)$ 确定的。因为它是控制方案的组成部分，其物理意义是一个驱动器或者感官矩阵，或者一个非自治子系统，所以，需要对 $F(z)$ 进行补偿。通过对滤波系数的更新和在均方意义上的残差 $e(n)$ 的最小化，动态的未知设备在控制系统中可以被成功应用。由 $X(z)$ $P(z)$ 定义的方案通常是控制的主要部分，而次要部分是由 $X(z)W(z)F(z)$定义的。

误差 $e(n)$ 的频域表达式为

$$\begin{aligned} E(z) &= D(z) - Y'(z) \\ &= X(z)P(z) - X(z)W(z)F(z) \\ &= [P(z) - W(z)F(z)]X(z) \end{aligned} \tag{3.58}$$

假设自适应滤波器最终结果是能够确保残差收敛到零，也就是说，系数矢量满足 $\boldsymbol{w}(n) = \boldsymbol{w}_0$和 $E(z)=0$ 条件。上述情况中，$W(z)$ 必须是一个最优的传递函数模型，即其主要路径为 $P(z)$，同时逆变换的次级路径为 $F(z)$，即

$$[W(z)]_{w=w_0} = \frac{P(z)}{F(z)} \tag{3.59}$$

式（3.59）呈现出三个主要问题，即图 3.2 所示结构的可行性[5]，它们都是与次级路径 $F(z)$ 基本属性息息相关的。第一个问题是，如果主路径 $P(z)$ 在同一时间刻度内不至少包含一个固有延迟，则不可能得到 $F(z)$ 逆变。第二个问题是，如果在失控频率 ω_c处 $F(\omega_c)=0$，则该系统在数学上是奇异的，在物理学上是不稳定的。最后一个问题是，当 $P(\omega_0)=0$ 时，不可观测的控制频率 ω_0 会为零，则导致滤波器的主路径为空。

自 20 世纪 80 年代以来，出现了许多补偿消除次级路径传递函数 $F(z)$ 不良影响的命题。其中，通过修改自适应 LMS 算法来确保收敛性的方法是最受欢迎的[6,7,8,9]。次级路径效应影响的减少是由输入序列 $x(n)$ 通过一个被安置在次级路径的辅助估计滤波器 $S(z)$ 实现的，如图 3.3 所示。在自适应结构中，当输入信号被滤波后，改进后的算法也相应地命名为滤波-x LMS 算法（FXLMS）。

根据图 3.3 所示，动态过程 $y'(n)$ 至 $d(n)$ 的相关性是通过 $F(z)$ 估计所得，其

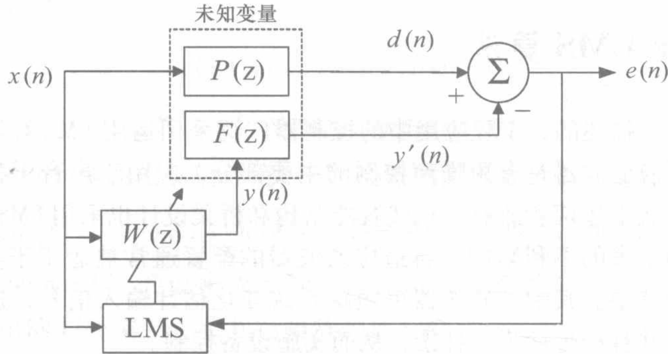


图 3.2　基于 LMS 的自适应系统标识配置

滤波系数通过离线的 LMS 算法获得并更新。控制滤波器的输出 $y(n)$ 也是控制系统的输入，它是对滤波器 $F(z)$ 和外部输入 $x(n)$ 的冲激响应的卷积求和：

$$y(n) = \sum_{i=0}^{m-1} w_i(n)x(n-i) \tag{3.60}$$

式中，m 是自适应滤波器 $W(z)$ 的数量级。

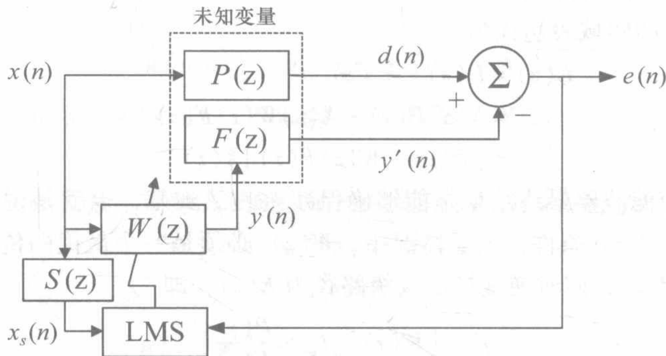


图 3.3　滤波-x LMS 结构

由于控制输入是 $y(n)$，所以 $F(z)$ 的第 k 阶输出 $y'(n)$ 为

$$y'(n) = \sum_{j=0}^{k-1} f_j y(n-j) \tag{3.61}$$

将式（3.60）代入式（3.61）中，可以得到

$$y'(n) = \sum_{j=0}^{k-1} f_j \sum_{i=0}^{m-1} w_i(n)x(n-i-j) \tag{3.62}$$

在求和节点处，输出误差 $e(n)$ 为

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - y'(n) \\ &= d(n) - \sum_{j=0}^{k-1} f_j \sum_{i=0}^{m-1} w_i(n)x(n-i-j) \end{aligned} \tag{3.63}$$

假设该自适应 FIR 滤波器和前馈通道 $F(z)$ 在滤波中，且式（3.63）的求和顺序

可以重新编排，则该系统的净输出可近似地用另一种形式表示，即

$$e(n) = d(n) - \sum_{i=0}^{m-1} w_i(n) \sum_{j=0}^{k-1} f_j x(n-i-j) \tag{3.64}$$
$$\approx d(n) - \sum_{i=0}^{m-1} w_i(n) x'(n-i)$$

式中

$$x'(n-i) = \sum_{j=0}^{k-1} f_j x(n-i-j) \tag{3.65}$$

式（3.64）的有效性是要求自适应滤波器在时域内的变化慢于上述的前馈通道的冲激响应。如果主体的假设不成立，则该逼近误差是显著的，故不可忽略。然而，在实际应用中，自适应系数伴随前馈通道的动态响应在同一时域内发生变化，则 FXLMS 算法可证明具有稳定性[7,10]。

在式（3.32）中，性能函数的梯度是

$$\left[\frac{\partial J(\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}\right]_{\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(n)} = \frac{\partial J(n)}{\partial w_i(n)} \tag{3.66}$$
$$= -2x'(n-i)e(n)$$

根据式（3.31）中定义的递归方程，自适应滤波器系数的更新为

$$w_i(n+1) = w_i(n) + \mu x'(n-i)e(n) \tag{3.67}$$

因此，在第 j 次采样步骤中，运用式（3.65）计算出 $x'(n-i)$ 和运用式（3.67）更新系数矢量 $\boldsymbol{w}$，最后由 $y'(n)$ 的运算来尽量减少输出误差。式（3.65）和式（3.67）表明输入序列 $x(n)$ 在更新滤波系数 ω_i 之前通过 $F(z)$ 进行了滤波。这是通过在实际应用中引入一个附加的滤波器 $S(z)$ 来估算 $F(z)$ 实现的，从而

$$x_s(n) = \sum_{i=0}^{m-1} s_i(n) x(n-i) \tag{3.68}$$

并且，式（3.67）中 $\boldsymbol{w}$ 的更新表达式变成

$$w_i(n+1) = w_i(n) + \mu x_s(n-i)e(n) \tag{3.69}$$

或者也可以表达为

$$\boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{w}(n) + \mu e(n)\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{3.70}$$

式中，上述的滤波矩阵 $\boldsymbol{S}$ 定义为

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ s_1 & s_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & s_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_k & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & s_k & & \ddots & s_0 \\ \vdots & & \ddots & & s_1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_k \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

式中，s_i是辅助滤波器$S(z)$的第k阶冲激响应。

值得注意的是，同时满足稳定性和收敛性的可能架构是估计的次级路径与主路径$F(z)$相等，也就是说$S(z)=F(z)$。然而，这种情况在实际运用中十分罕见。因为控制传递函数$F(z)$通常是未知的，因此需要自适应策略来适应设备的动态变化。

不同于经典的LMS算法，与FXLMS算法相关联的最大步长μ_{max}是一个能够同步自适应滤波器的长度、滤波的参考信号和前馈通道$F(z)$延迟的函数[11]。系统的不稳定性也可能是由于模型的误差，这会使FXLMS的变化规律变得非常不稳定[12]。通过使用详尽的系统识别方法来改进系统模型，以解决一些特定的问题，是一种常见的方法。然而，由于系统突出的非线性的缘故，模型的不确定性将会降低其性能和破坏更新原则。正如在3.3节中所讨论的，不合适的步长μ可能对误调整因子M产生不良的影响。通常μ越大，越能更好地跟踪非平稳信号。但是，随着μ的增加也将会产生更大的失调噪声，从而增加自适应滤波器的不稳定性。

参考文献

[1] Wiener, N., 1949, *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*, John Wiley and Sons, New York.

[2] Haykin, S., 1996, *Adaptive Filter Theory*, 3rd edn, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.

[3] Elliot, S. J., 2001, *Signal Processing for Active Control*, London, Academic Press.

[4] Bonnans, J. D., 2003, *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects*, 2nd edn, Spring-Verlag, Berlin Heidelberg.

[5] Kuo, S. M., Morgan, D. R., 1996, *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, John Wiley and Sons, New York.

[6] Widrow, B., Walach, E., 2007, *Adaptive Inverse Control: A Signal Processing Approach*, Reissue edn, John Wiley and Sons, New York.

[7] Widrow, B., Stearns, S. D., 1985, *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.

[8] Morgan, D. R., 1980, "An Analysis of Multiple Correlation Cancellation Loops With A Filter in The Auxiliary Path," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-28, Aug. 1980, 454–67.

[9] Burgess, J. C., 1981, "Active Adaptive Sound Control in A Duct: A Computer Simulation," *Journal of American Acoustic Society*, 70(3), 715–26.

[10] Nelson, P. A., Elliott, S. J., 1992, *Active Control of Sound*, London, Academic Press.

[11] Elliott, S. J., Nelson, P.A., 1989, "Multiple-Point Equalization in A Room Using Adaptive Digital Filters," *Journal of Audio Engineering Society*, 37(11), 899–907.

[12] Fraanje, R., Verhaegen, M., Elliott, S. J., 2007, "Robustness of The Filtered-X LMS Algorithm—Part I: Necessary Conditions for Convergence and The Asymptotic Pseudospectrum of Toeplitz Matrices," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(8), 4029–37.

第4章 时频分析

2.5节中说明了表示非线性、非平稳信号的必要性，并简要介绍了常用表征手段的不足。Gabor小波提供了所有可用的小波函数的最优时频同步分辨率，但其被证明在解决铣削振动信号问题上的效果是不令人满意的，因为会扰动切削状态和影响铣削稳定性。所有基于傅里叶变换的方法，包括小波变换，其利用分叉运动状态或即将发生的动态不稳定的时间指示来区分频谱分量的变化是不可行的。

傅里叶变换的正弦基函数分辨率太差主要是由其基本性质导致的。至于理由，可以从式（2.13）中时间函数 $f(t)\in L^2$（$\boldsymbol{R}$）的傅里叶变换看出。因为指数基函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=\sin(\omega t)-\mathrm{i}\cos(\omega t)$ 中 t 的定义域是（$-\infty$，∞），且 ω 的映射域也为（$-\infty$，∞），而无穷积分要求 $f(t)$ 是要被完全定义的和在无限的 t 域内 ω 域有适当有效的表达式。也就是说，$f(t)$ 在 t 域内的摄动会对全体 ω 域产生影响。因此，t 域在变换域内的局部性损失将用狄拉克 δ 函数 $\delta(t)$ 进一步说明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-y)f(t)\,\mathrm{d}t = f(y) \tag{4.1}$$

$\delta(t)$ 的傅里叶变换为

$$\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = 1 \tag{4.2}$$

因此，在 t 域中脉冲信号并不一定在 ω 域有相应的脉冲。它是无限的傅里叶频谱。由于非平稳信号的异常和扰动在物理上表现为振幅可忽略不计的短脉冲，则其信号的总动态效应是被无限的 ω 分量不可避免地掩盖。

除了在傅里叶域内的虚假陈述，扰动的动态响应也可能被曲解。再次观察式(2.13)，其所述的数学变换是平均调制函数 $f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 在无限积分上的操作。为了满足强制性和硬性规定产生的平均，虚构分量 ω 是必不可少的。被频率分量所误导的虚假陈述是傅里叶变换应用在非线性及非平稳信号中最突出的问题[1]。

实时频率成分的计算方法是以在变换域内进行局部验证为基础的。参考时间是通过在傅里叶积分中引入一个“窗函数”来确立的。上述方法以维纳-辛钦定理为基础，其定理[2]指出

$$|F(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{4.3}$$

式中，$|F(\omega)|^2$是函数 $f(t)$ 的功率谱；$R(\tau)$ 是关于 $f(t)$ 的自相关函数，定义为

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\bar{f}(t-\tau)\,\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

式中，$\bar{f}(t)$ 是 $f(t)$ 的共轭复数。

因此，关于 $f(t)$ 的功率谱可以用其自相关函数来替换表示。将自相关函数加入一个依赖因子 t，即 $R(\tau, t)$，故式（4.3）额外增加了一个 t 维度，即

$$|F(\omega,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{4.5}$$

式（4.5）为所有基于积分的时频表示法提供了基本的框架，其中由引入 t 参量的窗函数 $R(\tau, t)$ 来估算 ω。上述的时频表示法包括，短时傅里叶变换（STFT）和连续小波变换（CWT）。

4.1　时间和频率的对应关系

正如它的名字所示，时频控制法解决的是同步时间-频率域内的振动控制。全面理解傅里叶变换中定义的时间和频率的对应关系有助于读者建立时频控制的概念。将考虑到 $f(t)$ 和 $g(t)$，连同下面提及的它们分别相对应的傅里叶变换 $F(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 所产生的影响。

如果关于标量 a 和 b 存在一个 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的线性和的函数，即 $s(t) = af(t) \pm bg(t)$，并具有如下的线性特性：

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t + b\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= aF(\omega) + bG(\omega) \end{aligned} \tag{4.6}$$

将 t 域移相 t_0 相当于在 ω 域内乘以一个相位因子：

$$\begin{aligned} F_0(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\tau+t_0)}\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega) \end{aligned} \tag{4.7}$$

相反地，将 ω 域移相 ω_0 相当于 t 域内调制一个指数函数：

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau+\omega_0)t}\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}f(t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

将 t 域缩放会导致 ω 域的逆缩放：

$$\begin{aligned} F_k(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(kt)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\tau/k)}\mathrm{d}\left(\frac{\tau}{k}\right) \\ &= \frac{1}{|k|}F\left(\frac{\omega}{k}\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

当缩放因子 $k>1$ 时，会导致中心频率减少 $1/k$ 和相应的频谱收缩 $1/k$。当 $k<1$ 时，则是相反的情况。上述情况也可以直接用一个非零常数 m 表示，即

$$f_m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(m\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{|m|}f\left(\frac{t}{m}\right) \tag{4.10}$$

上述的缩放特性是在联合时频域内，通过小波函数控制 ω 域或者 t 域的分辨率来实现的。

考虑到 $f(t)$ 的 n 阶导数，则相应的傅里叶变换可直接表述为

$$F_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right) = (\mathrm{i}\omega)^n F(\omega) \tag{4.11}$$

需要注意的是，由于无限积分是一种线性变换，故此微分与积分的顺序是可互换的。上述的式（4.11）将会在不确定原理的章节中引用。

回顾2.4节的内容，其中 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积为

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.12}$$

同时，式（4.12）在 ω 域的傅里叶变换为

$$F[f(t) * g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = F(\omega)\cdot G(\omega) \tag{4.13}$$

当 $t=0$ 时，可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(-\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{4.14}$$

在上述的情况中，$f(t)$ 是复平面的，并且有 $f(t)=g(-t)$。使用 Parseval 定理，可得到如下表达式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)^2|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{4.15}$$

或者表述成

$$\langle f(t), \bar{f}(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle F(\omega), \bar{F}(\omega)\rangle = E \tag{4.16}$$

式（4.15）和式（4.16）意味着总能量是守恒的，并在时域和频域内定义的信号的能量是等效可互换的。这种特性对非线性的时频控制具有特殊意义，具体内容将会在第7章中详细讲述。

4.2　时域和频域的分辨率

根据信号能量和能量守恒的基本概念，关于函数的时域和频域的分辨率可以由标

准偏差和方均根的概念来定义。在信号能量的守恒中，是由式（4.15）和式（4.16）来确定所得的平均时间$\langle t\rangle$和平均频率$\langle \omega\rangle$，即

$$\langle t\rangle = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt \tag{4.17}$$

$$\langle \omega\rangle = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\,|F(\omega)|^2 d\omega \tag{4.18}$$

如果$f(t)$是有限的并具有紧支集时，即在有限集合$(-\infty,\ \infty)$上有$f(t)=0$。在上述情况中，$f(t)$是一个时频窗函数，并分别将$\langle t\rangle$和$\langle \omega\rangle$作为其时域和转换频域的中心。因此，从方均根的层面上说，上述对应的持续时间和频率宽带为

$$(\Delta_t)^2 = \frac{1}{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(t-\langle t\rangle)^2|f(t)|^2 dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{E}|f(t)|^2 dt - \langle t\rangle^2 \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}(\Delta_\omega)^2 &= \frac{1}{2\pi E}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\langle \omega\rangle)^2|F(\omega)|^2 d\omega\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{E}|F(\omega)|^2 d\omega - \langle \omega\rangle^2\end{aligned} \tag{4.20}$$

式（4.19）和式（4.20）是两个定量表述信号误差分别相对于$\langle t\rangle$和$\langle \omega\rangle$的方差。

4.3 不确定原理

以不确定原理为界是一个有关窗函数$\Delta_t\Delta_\omega$时频宽度的重要属性，若$|t|\to\infty$和$\{f(t)\sqrt{t}\}\to 0$，则

$$\Delta_t\Delta_\omega \geqslant \frac{1}{2} \tag{4.21}$$

仅当$f(t)$为高斯型时，如$f(t)=Ae^{-\alpha t^2}$，等号成立。

式（4.21）表示在任意分辨率的情况下，时间和频率的局部化不能同时实现，即使用窗函数将精密的时间分辨率持续一小段时间后，会导致大的频率带宽内的频谱分辨率降低。因此，根据Δ_ω的数值来确定Δ_t的值，反之亦然。

为了说明不确定原理的不平等性，首先简单假设$\langle t\rangle=0$和$\langle \omega\rangle=0$，则式（4.19）和式（4.20）相对应的宽度分别为

$$(\Delta_t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2 dt \tag{4.22}$$

$$(\Delta_\omega)^2 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2|F(\omega)|^2 d\omega\right] \tag{4.23}$$

因此

$$(\Delta_t\Delta_\omega)^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2 dt\right]\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2|F(\omega)|^2 d\omega\right]\right\} \tag{4.24}$$

假设函数$g(t)$的傅里叶变换是$G(\omega)=\omega F(\omega)$，根据 Parseval 定理和两个时域函数$f(t)$和$g(t)$，式（4.24）也可以表示为

$$(\Delta_t\Delta_\omega)^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right]\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\bar{g}(t)\,\mathrm{d}t\right]\right\} \tag{4.25}$$

根据式（4.11），$f(t)$ 的一阶导数为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = (\mathrm{i}\omega)F(\omega) \tag{4.26}$$

将式（4.26）带入式（4.25），则

$$(\Delta_t\Delta_\omega)^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right]\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|^2 \mathrm{d}t\right]\right\} \tag{4.27}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t\,f(t)\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} t\left[\frac{\mathrm{d}f^2(t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{t\,f^2(t)}{2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{4.28}$$

根据柯西—施瓦茨不等式[3]得出

$$\left[\int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b [\varphi_1(t)]^2 \mathrm{d}t\right]\left[\int_a^b [\varphi_2(t)]^2 \mathrm{d}t\right] \tag{4.29}$$

式中，$\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是两个定义在 $[a, b]$ 上的可积的实数函数，故式（4.27）变换成

$$\begin{aligned}(\Delta_t\Delta_\omega)^2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right]\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|^2 \mathrm{d}t\right]\right\} \\ &\geqslant \left|\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right|^2\end{aligned} \tag{4.30}$$

将式（4.28）带入式（4.30）后，可以得到 $\Delta_t\Delta_\omega \geqslant \frac{1}{2}$ 的结论，这就是式（4.21）所表述的不确定原理。

4.4 短时傅里叶变换

傅里叶变换的正弦基函数是全局的（无限负载），并且在时间上是平稳的。但是，用它来表示随时间变化的信号的频谱响应是不充分的。为了解决这个问题，函数 $f(t)$ 可以使用适当的窗函数 $\varphi(t)$ 在期望的时间和频率上加窗。加窗函数 $f_\varphi(t) = f(t)\varphi(t-\tau)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}F_\varphi(\tau,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \langle f_\varphi(t), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\rangle \\ &= \langle f(t), \bar{\varphi}(t-\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\rangle\end{aligned} \tag{4.31}$$

窗函数 $\varphi(t)$ 通常是紧凑的且持续时间短，因此可以对 $f_\varphi(t) = f(t)\varphi(t-\tau)$ 使用傅

里叶变换，进而说明信号在每个时间位置 $t=\tau$ 上的局部频谱特性。上述中，加窗后的傅里叶变换也被称为短时傅里叶变换（STFT）。

上述式（4.31）中的最后一个等式，$f(t)$ 加窗后的傅里叶变换可以认为是使用基函数 $\varphi(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$后得到的近似$f(t)$ 的函数。通过 τ 的时移即 $\varphi(t-\tau)$ 和关于 $\varphi(t)$ 在频率 ω 处的 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$频率调制，在每个（$\tau$，$\omega$）处得到$f(t)$ 的估算值，其是时频同步平面上的刻度线。

为了使内积有效，$\varphi(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$必须是一个正交子集且具有可容许性。另外，窗函数 $\Phi(\omega)$ 的傅里叶变换必须满足以下条件：

$$\Phi(\omega=0)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t\neq 0 \tag{4.32}$$

在 $\omega=0$ 处需要具有非零频谱，$\Phi(\omega)$ 基本上是一个低通滤波器。换句话说，为了研究$f(t)$ 需要将整个时间轴放宽。在 $\varphi(t-\tau)$ 定义的范围内，仅需要取$f(t)$ 的一部分。式（4.31）中 STFT 的 $F_\varphi(\omega,\tau)$，通过时间 Δ_t和频率带宽 Δ_ω，表述了关于$f(t)$ 在闭区域$[\langle t\rangle+\tau-\Delta_t,\langle t\rangle+\tau+\Delta_t]\times[\langle\omega\rangle+\omega-\Delta_\omega,\langle\omega\rangle+\omega+\Delta_\omega]$内的时间和光谱信息。

时间函数$f_\varphi(t)=f(t)\varphi(t-\tau)$可以通过下列的反傅里叶变换得到：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_\varphi(\tau,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k}\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-t)\omega}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\omega\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(t-\tau)\delta(k-t)\mathrm{d}t\\ &= f(k)\varphi(k-\tau)\end{aligned} \tag{4.33}$$

用 t 取代 k，则通过式（4.33）可以得到：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\varphi(0)}\int_{-\infty}^{\infty}F_\varphi(\tau,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{4.34}$$

因此，$f(t)$ 是 $F_\varphi(\omega,\tau)$ 通过式（4.34）中的公式变换得到的。

使用数字化计算机对$f(t)$ 进行采样和对 $\varphi(t)$ 进行加窗，则式（4.31）中 STFT 的积分可以通过一系列的和运算得到：

$$F_\varphi(\tau,\omega)\approx\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}f(k\Delta t)\varphi(k\Delta t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi n}{N\Delta t}\right)(k\Delta t)} \tag{4.35}$$

式中，Δt 是采样率，$k=0$，…，$N-1$，同时，$n=-N/2$，…，，$N/2$。

倘若在$f(t)$ 和 $\varphi(t)$ 的采样速率下有足够的样本数量，其采样速率是等于或高于 Nyquist 频率，则 STFT 的离散形式就能很好地逼近相应的积分变换。

4.5 时间连续的小波变换

STFT 中时间局部性是由窗函数提供的，然而频率局部性的建立是通过复平面的正弦函数。一旦窗函数确定，由 Δ_t 和 Δ_ω 所确定的相关时间和频率的分辨率是固定不变

的，且它们在时间-频率平面的位置不会发生改变。它们也没有通过相应地调整自身来适应不同的或变化的频率。更具体地说，解决低频成分时不会扩大 Δ_t 的范围，同时应对高频问题时也不会缩小其宽度。通过缩放时间变量 t 来调整窗函数的适应性，可以放宽其固有刚性。式（4.9）表明在 t 域内的缩放会导致 ω 域的逆缩放。故从式（4.9）可以看到，如果 $\varphi(t)$ 的中心（平均）频率是 ω_c，那么根据相同标度的频谱，经过 τ 变换、b 缩放后的函数 $\varphi\left(\frac{t-\tau}{b}\right)$ 是以时间 τ 为时间中心和以 $b\omega_c$ 为中心缩放频率。

上述连续时间的小波变换（CTWT 或简称 CWT）探讨了其扩展性能。这是通过采用特定属性和特征的正交基函数，从而使得时间-频率分辨率具有自适应性。CTWT 是有限能量函数 $f(t)\in L^2(-\infty,\infty)$ 映射至基函数 $\psi(t)$ 的线性变换，即

$$
\begin{aligned}
W_{\psi}f(b,a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \left\langle f(t),\ \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\rangle
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

式中，转化因子是参数 b，$a>0$ 则 $\psi(t)$ 扩大（缩放）。分析窗函数 $\psi(t)$ 必须考虑下列性质：

$$
\boldsymbol{\psi}(\omega=0) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{4.37}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} t^p\psi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{4.38}
$$

式（4.37）表明，$\psi(t)$ 具有局域性和振荡形式，如波浪，因此被称为一个小波。由于 $\boldsymbol{\psi}(0)=0$，$\psi(t)$ 的傅里叶变换在 $\omega=0$ 处会消失，故小波函数也如同一个带通滤波器。第二属性如式（4.38）所述，是一个加强的约束条件，即要求 $\psi(t)$ 具有更高的 p 阶消失矩（$p=0,\cdots,M-1$）。式（4.37）的允许条件在传统意义上为

$$
C_{\psi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\boldsymbol{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega < \infty \tag{4.39}
$$

式（4.39）意味着 $\boldsymbol{\psi}(0)=0$，这与式（4.37）表达一致。

不像 STFT 中频率信息是根据复平面的正弦函数得到的，CTWT 是根据各种扩展的小波函数来建立同步的时间尺度信息。当式（4.36）中缩放参数 a 变小时，小波 $\psi(t)$ 的跨度会沿着时间轴收缩，从而扩大频率范围。然而，当 a 对应的时间量 Δ_t 很小时，则相关联的频率带宽 Δ_ω 可能过大而没法区分低频成分。即使 a 与频率相关，如频率的量度，其关系通常也不是倒数关系。

典型的带通滤波器会使得小波函数 $\psi(t)$ 具有两个平均频率（中心），其分别在傅里叶域内 $\boldsymbol{\psi}(0)=0$ 处轴的两侧。因为这两个中心是对称的，且彼此成镜像的，所以仅考虑正数频率就可确定频率中心和频谱的宽度。根据式（4.18）和式（4.20）所述的定义，使用半无限积分可以得到 $\psi(t)$ 的中心和带宽[4]：

$$
\langle\omega\rangle_{\psi}^{+} = \frac{\int_0^{\infty}\omega\,|\boldsymbol{\psi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega}{\int_0^{\infty}|\boldsymbol{\psi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega} \tag{4.40}
$$

$$(\Delta_{\omega^+})_\psi^2 = \frac{\int_0^\infty (\omega - \langle\omega\rangle^+)^2 \,|\boldsymbol{\psi}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega}{\int_0^\infty |\boldsymbol{\psi}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega} \tag{4.41}$$

需要注意的是，$\int_0^\infty |\boldsymbol{\psi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$ 等于式（4.15）中 Parseval 定理所述的能量 E 的一半。

然而，对应的时间中心和时间长度并没有类似的对称性。因此它们与式（4.17）和式（4.19）中的定义保持一致，即

$$\langle t\rangle_\psi = \frac{1}{\|\psi(t)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} t\,|\psi(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{4.42}$$

$$(\Delta_t)_\psi^2 = \frac{1}{\|\psi(t)\|^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t\rangle_\psi)^2\,|\psi(t)|^2 \mathrm{d}t\right] \tag{4.43}$$

式中，$\psi(t)$ 的范数的二次方，即 $\|\psi(t)\|^2$ 等于所定义的能量 E。

虽然它们有自适应的缩放功能，但是小波仍受到不确定性原理影响。也就是说，时间-频率的分辨率均都受到式（4.44）的限制。

$$(\Delta_t)_\psi (\Delta_{\omega+})_\psi \geqslant \frac{1}{2} \tag{4.44}$$

因此，式（4.36）中的小波变换矩阵 $W_\psi f$（b，a）依旧保持着 $f(t)$ 的局部特性。$\psi(t)$ 的时间窗口：

$$[a\langle t\rangle_\psi + b - a(\Delta_t)_\psi, a\langle t\rangle_\psi + b + a(\Delta_t)_\psi] \tag{4.45}$$

和频率窗口：

$$\left[\frac{1}{a}(\langle\omega\rangle_\omega^+ - (\Delta_{\omega+})_\psi), \frac{1}{a}(\langle\omega\rangle_\psi^+ + (\Delta_\omega +)_\psi)\right] \tag{4.46}$$

值得注意的是，$2a(\Delta_t)_\psi \times \left(\frac{2}{a}\right)(\Delta_{\omega+})_\psi = 4(\Delta_t)_\psi(\Delta_{\omega+})_\psi$ 是时间-频率窗口的面积。因此，其区域面积是恒定的。

式（4.37）~式（4.39）中，若小波函数 $\psi(t)$ 满足等式所定义的条件，通过对被采样的小波变换 $W_\psi f$（b，a）进行双积分运算，则函数 $f(t)$ 也可以表示为

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^\infty \frac{1}{a^2}[W_\psi f(b,a)]\overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}a\right\}\mathrm{d}b \tag{4.47}$$

$\psi(t)$ 通常是实数函数，因此 $\overline{\psi}(t) = \psi(t)$。根据特定属性，可以得到下列等式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^\infty \frac{1}{a^2}|W_\psi f(b,a)|^2 \mathrm{d}a\right\}\mathrm{d}b \tag{4.48}$$

式中，小波时标平面上 $W_\psi f$（b，a）的加权能量等于时域中信号的能量。式（4.48）通常被认为是 Parseval 定理对应于式（4.15）中傅里叶变换的情况。

根据式（4.36），使用二元法研究离散的 CWT 在本章中暂不讨论，该研究在小波滤波器组的章节中讨论更为合适。

4.6　瞬时频率

正如在第 2 章中所述，由于傅里叶变换在数学上是线性的，且非线性非平稳信号

的频谱特性随时间变化，因此基于传统傅里叶的分析不足以解决信号各自频谱成分的时间进程的问题。所以，必须要制定一种新的方法，来解决前面所讨论的各种问题。替代傅里叶分析的方法能够有效地解决之前讨论的问题，故本节主要讨论瞬时频率的基本概念。通过非线性动态系统中非平稳响应的分析，该方法得到了很好的验证。

4.6.1 基本概念

平稳信号的频率可以很好地由傅里叶方法来定义。通常来说，频率作为物理场参数单位时间内振荡的参量，如位移、电流或电压。但在通信、地震、雷达、医疗、声呐和超声波中的信号通常是非平稳的。由于该信号的频谱特性会随时间发生变化，之前的定义就变得不准确[5]且失去其有效性。因此，对于特定的时变性质需要一个具有可行性和完整性的概念，这即是瞬时频率概念的实际意义。因为瞬时频率是一种直观的表示和在物理上是用来描述与时间相关的信号频谱特性，近年来主要研究如何建立能同时适用于单组分和多组分非平稳信号的瞬时频率的可行定义。Gabor[6]第一次引入复数的分析信号，后来被 Ville[7]用来定义信号瞬时频率中的相位对时间的导数。该定义十分适用于单组分信号。但是，对于多组分信号，该定义并不合理。更甚者，这种不合理性不仅会阻碍之前普遍接受的瞬时频率定义的发展进程，而且还会让人质疑瞬时频率存在的必要性[8]。在本节中将介绍瞬时频率的基本概念，并且与该定义相关的问题将会在之后的章节中举例分析说明。

时变信号 $x(t)$ 可同时调幅（AM）和调频（FM），即

$$x(t) = a(t)\cos(\phi(t)) \tag{4.49}$$

式中，$a(t)$ 是信号的瞬时振幅；$\phi(t)$ 是瞬时相位。

该信号对应的复数形式为

$$z(t) = a(t)\exp(\mathrm{i}\phi(t)) \tag{4.50}$$

上述的 $z(t)$ 为解析信号。其中，$\phi(t)$ 的时间导数被定义为瞬时频率。然而，该定义对于任意信号的 AM 和 FM 有许多组合的可能性。式（4.50）唯一的不足是没有实际的物理意义。为了规避上述的问题并且获得唯一的复数信号，Gabor[6]提出了“抑制负频率的振幅和将正频率振幅乘以 2”的方法。按照该办法，Gabor 提出的时域复数信号同样是一种解析信号，其定义稍作改动，即

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + \mathrm{i}y(t) \\ &= x(t) + \mathrm{i}H[x(t)] \\ &= a(t)\exp(\mathrm{i}\phi(t)) \end{aligned} \tag{4.51}$$

在式（4.51）中，$z(t)$、$a(t)$ 和 $\phi(t)$ 的使用具有相同的意义，而 $y(t)$ 为解析信号的虚部。$H[x(t)]$是时变信号 $x(t)$ 的希尔伯特变换：

$$y(t) = H[x(t)] = \frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau = x(t) * (p/\pi t) \tag{4.52}$$

式中，p 为柯西主值。

在理论上 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的相位相差是 $\pi/2$。因此，定义的瞬时幅值和相位具有唯

一性，即

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \tag{4.53}$$

$$\phi = \arctan(y(t)/x(t)) \tag{4.54}$$

根据式（4.53）和式（4.54），Ville[7] 进行了更深入的研究，将瞬时频率定义为瞬时相位对时间的倒数：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\arctan(y(t)/x(t))) \tag{4.55}$$

上述定义抓住了瞬时特性的本质，并符合对瞬时频率概念的直观理解。对正弦信号使用该定义时，得到的瞬时频率与信号实际的瞬时频率是相同的。例如，图4.1所描述的是正弦波信号的波形，并利用式（4.55）来确定其对应的瞬时频率，其中该信号的频率最初是1Hz，然后突然切换到3Hz。同时，图4.1b中的瞬时频率也发生了该变化。在图4.2中所示的是一个线性调频信号的波形，以及它对应的瞬时频率与傅里叶变换。在图4.2中，瞬时频率被视为是1~3Hz的线性变化，这种频率的线性变化在傅里叶频谱中不会显现，同时虚拟的频率分量也会超出1~3Hz范围之外。

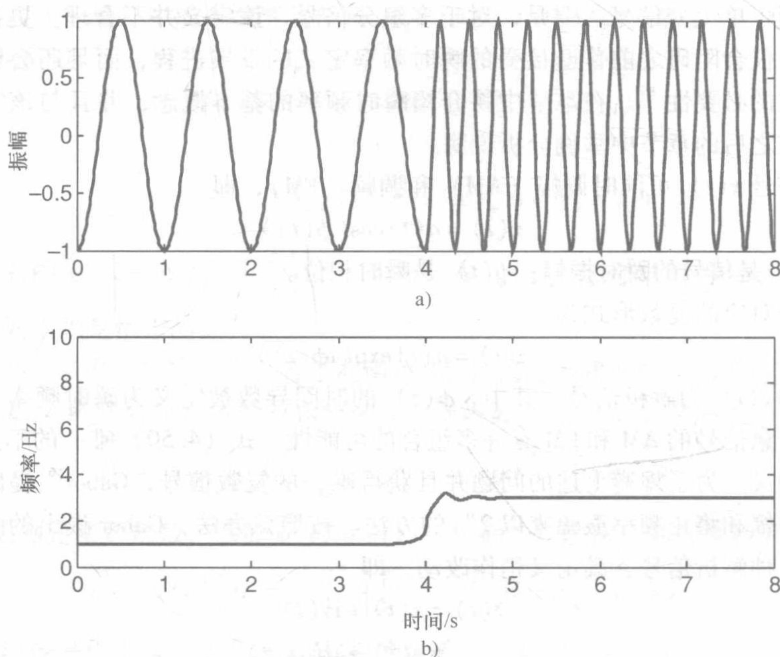


图 4.1

a）简单正弦信号的时间轨迹：最初为1Hz，后突然切换到3Hz

b）使用传统定义的瞬时频率

该定义还有其他的根据[3,9]。其中，与复数的解析信号 $a(t)\exp(\mathrm{i}\phi(t))$ 相关联的频率扩展定义为[3]

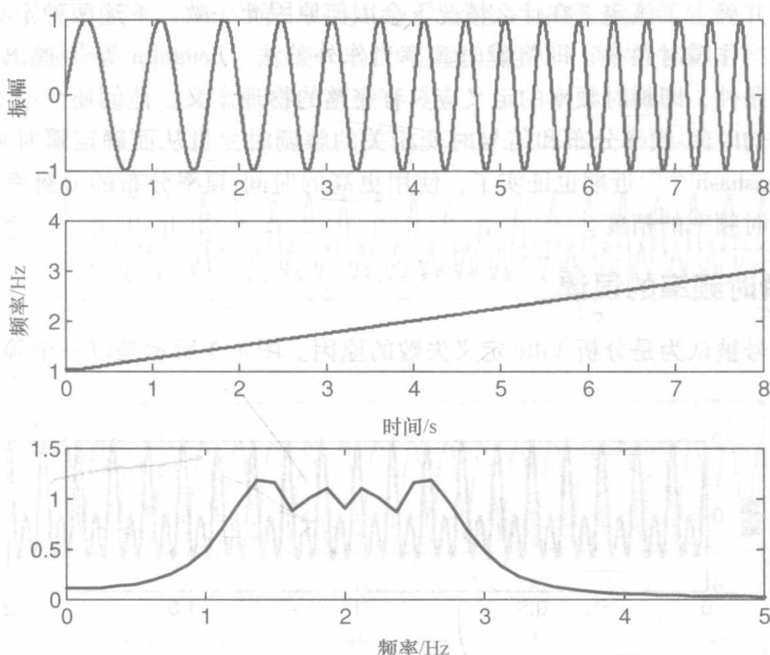


图4.2 线性调频信号（上图），其相对应的瞬时频率（中图）和快速傅里叶变换（下图）

$$\sigma_{\omega}^{2} = \int_{-\infty}^{\infty} (a'(t)^{2})\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} (\phi'(t) - \langle\omega\rangle^{f})^{2} a^{2}(t)\mathrm{d}t \tag{4.56}$$

式中，$\langle\cdot\rangle^{f}$是频域内的平均值。

第一个积分表示振幅调制的频率扩展，第二项是根据平均频率中 $\phi'(t)$ 的偏差，其中 $\phi'(t)$ 是与瞬时频率紧密相关的。并且，平均频率为

$$\langle\omega\rangle^{f} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \mid X(t) \mid^{2} \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t) \mid x(t) \mid^{2} \mathrm{d}t = \langle\phi'(t)\rangle^{t} \tag{4.57}$$

式中，$X(\omega)$ 是 $x(t)$ 的傅里叶变换；$\langle\cdot\rangle^{t}$是在时间域内的平均值。

式（4.57）表明，平均频率可以由相位导数与时间比重的积分得到。同时，它被称为瞬时频率相位的导数。

由于这些原因，瞬时频率的概念结合了解析信号和希尔伯特变换。然而，该定义未能正确解释多组分信号的情况，这即是解析信号的难点。在单组分信号的情况下，瞬时频率往往是不必要的[9]。长期的研究旨在消除 Ville 定义中介于理论分析和物理意义相互之间的矛盾以及相同定义的多组信号的不实用性[3,9-18]。参考文献［5］中指出了瞬时频率定义的演化过程。根据对时间-频率分布关系的深入探讨，对瞬时频率和分析信号、群延迟，以及带宽与时间的乘积之间的关系进行了回顾。同时，Cohen[3]还回顾了 Ville 定义的发展历程并对该定义提出了一些疑问。此外，他还研究了带有群延迟[10]的瞬时频率，以及瞬时频率定义的歧义性与振幅三者之间的关系[11]。Cohen 认为，正确使用 Ville 定义需要在一个具有无界峰值的但其振幅是非负的瞬时频率与一个有界的但其瞬时振幅是负值的瞬时频率之间做出选择。Oliveira 等[9]分析了 Ville 定义中的优

点和缺点，并确定了该定义在什么情况下会因何原因而失效。下述两种定义可供选择：将平均频率当作瞬时频率，即将瞬时频率当作外差法。Loughlin 等[12] 提出了关于瞬时频率的四个条件，即瞬时频率的定义应具有完整的物理意义。他们还介绍了一种方法，即利用正数的时间-频率分布和信号时变相关的解调时变量从而确定瞬时频率。同理，Barkat 和 Boashash[13,14] 近期也证实了，使用更高的时间-频率分布的分辨率可以进一步提高估算瞬时频率的精度。

4.6.2 瞬时频率的误读

示例信号被认为是分析 Ville 定义失败的原因。图 4.3 所示是以一个等幅值的双组分信号为例：

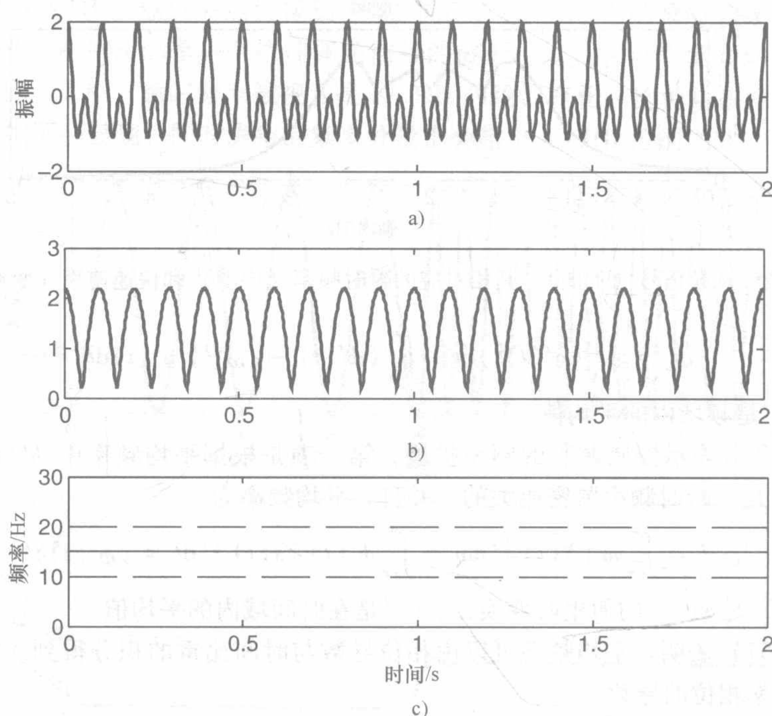


图 4.3

a）一个等幅值的双组分信号 b）图 a 中的信号的振幅调制 c）运用 Ville 定义确定的瞬时频率，其中虚线表示原来的两个频率

$$x(t) = a_0(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \tag{4.58}$$

式中，a_0 是恒定的振幅。

图 4.3 提供了一个双组分信号，但是这两个分量信号具有不相等的振幅，即

$$x(t) = a_1\cos(\omega_1 t) + a_2\cos(\omega_2 t) \tag{4.59}$$

式中，a_1和 a_2均为恒定的振幅。

图 4.5 所示的多组分信号是一台铣床所记录的一种典型的动态不稳定响应[19]。其

中，图a绘制信号的时间历程，图b和图c通过运用Ville定义分别显示了其相对应的振幅调制和频率调制。在图4.3c和图4.4c中，通过运用Ville定义可知，虚线是两个分量的频率（ω_1，ω_2），实线是所得到的瞬时频率。

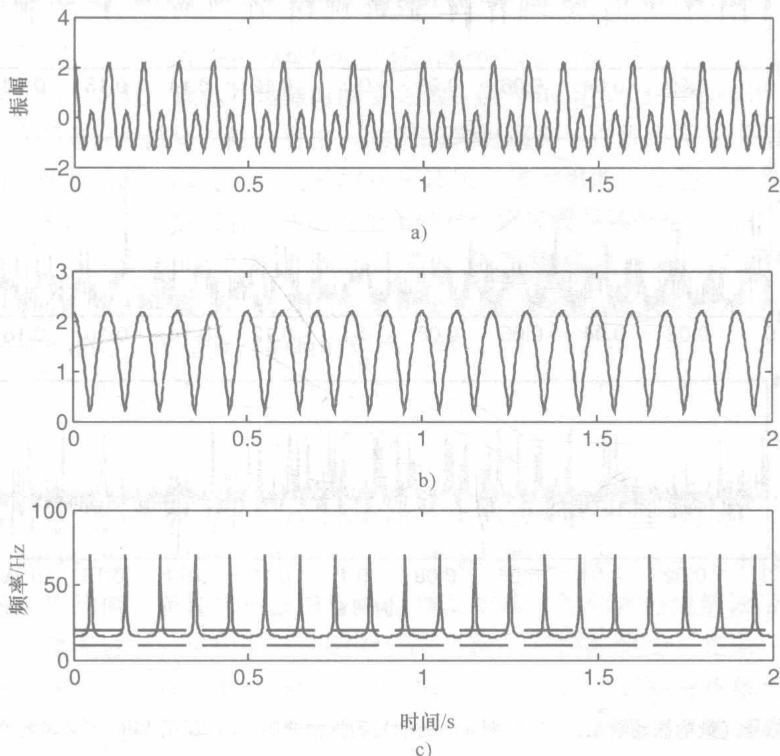


图　4.4

a）是一个不等幅值的双组分信号　b）图a中的信号的振幅调制　c）运用Ville定义确定的瞬时频率，其中虚线表示原来的两个频率

图4.4所示是一个典型的例子，能很好地说明由于瞬时频率定义不清导致的各种问题。其中的一些如下：

1）$x(t)$ 是由两个振幅和频率恒定的信号组成。因此，这是一个固定的信号，但是它的振幅调制和频率调制（瞬时频率）都表现出随时间变化的特性。

2）信号中仅存在两个频率 ω_1 和 ω_2，且有时得到的瞬时频率会为负值，则信号将受到严重的遮蔽。

3）在两个频率 ω_1 和 ω_2 都实际存在的情况下，为什么会只有一个瞬时频率？

关于这一定义其他问题，也可以在参考文献［3］中找到。正如我们的理解，图4.5中关于振幅和频率调制的精细检查的结论是，Ville定义对瞬时频率的诠释无法符合铣削过程所有的基本特点。换句话说，虽然瞬时频率是有根据的物理概念，但图4.4c中的瞬时频率是没有物理意义的。在瞬时频率的传统定义下，另一个例子是不是也说明了数理模型并不总是能很好地保证或提供完善的物理解释？

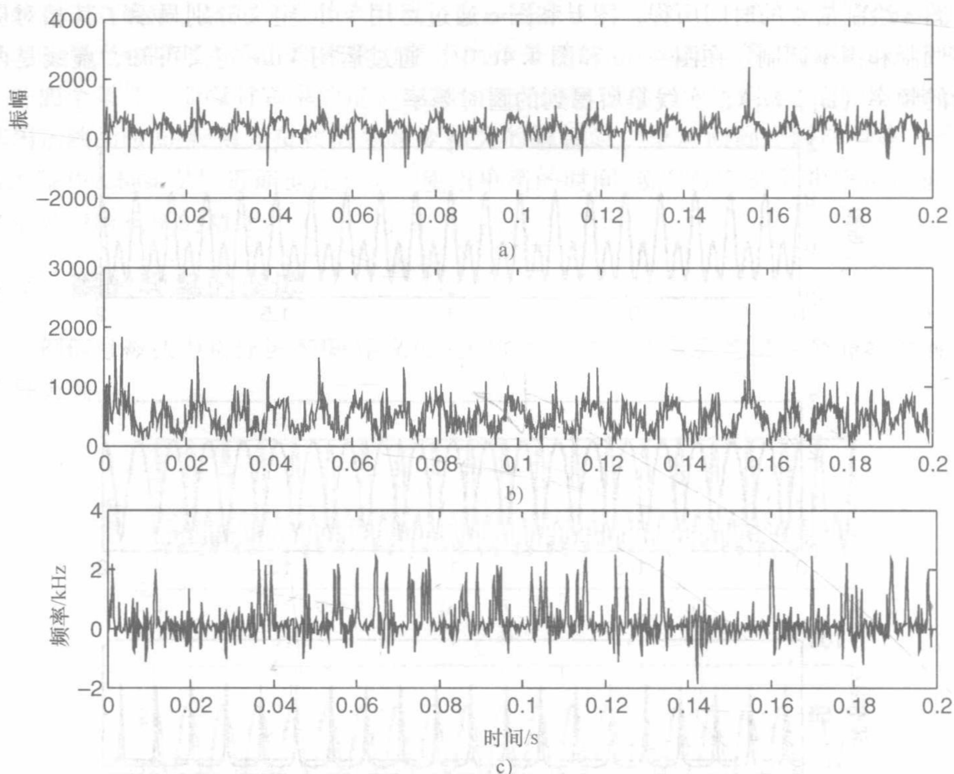


图　4.5

a）多组分信号（铣削振动数据）　b）图 a 中的信号的振幅调制　c）运用 Ville 定义确定的瞬时频率

关于瞬时频率必须具备的性质，以及这些性质是否表明了信号的特性的一些问题均被广泛地研究报道[3,5,9,12]。以下提出了四个物理条件用于计算信号的 AM 和 FM[12]：

1）如果信号 $x(t)$ 的幅值是有界的，那么它的振幅调制的幅值 $A(t)$ 也应是有界的。也就是说，$|x(t)|<\infty$ 意味着 $|A(t)|<\infty$。

2）瞬时频率 $f(t)$ 应被限制在该信号所占用的频率范围内，即

$$|X(\omega)^2|=0,\omega\notin(\omega_{\min}<\omega<\omega_{\max})\Rightarrow\omega_{\min}<f(t)<\omega_{\max}$$

3）对于纯正弦波信号 $x(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\phi_0)$，它始终是 $|A(t)|=|A_0|$ 和 $f(t)=\omega_0$。

4）如果该信号的幅值是一个常数 c，则瞬时频率的值不应该被改变。也就是说，如果 $x(t)$ 确定了 $A(t)$ 和 $f(t)$，则 $cx(t)$ 确定的是 $cA(t)$ 和 $f(t)$。

此外，对于具有恒定振幅和与时间无关的频谱成分的多组分信号，其瞬时频率也应该是与时间无关的，即

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N}a_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_{it}+\phi_i)}\quad 同时\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=0 \tag{4.60}$$

上述情况被 Oliveira 和 Barroso 加入参考文献［9］中作为条件 5。

图4.3中的信号也是恒定的，其振幅调制是非平稳的，但其瞬时频率是两个频率的平均值且是固定的，故许多研究者接受了Ville的定义。任一时刻的平均频率甚至被一些人定义成一种瞬时频率[9,12]，但是，这种观点是不恰当的。为了解释说明，非平稳信号定义为

$$x(t) = a_0(\cos(\omega_0 t + bt^2) + \cos(\omega_0 t - bt^2)) \tag{4.61}$$

式中，a_0 和 b 均为常数。该信号是随时间变化的，但Ville定义的瞬时频率可取值成 ω_0。也就是说，非平稳信号被认为是具有单一固定的瞬时频率，则频率无法说明信号中所有频率随时间演变的情况。因此，即使平均频率满足上述列出的五个物理条件，瞬时频率也不能定义为平均频率，故仅有上述的五个条件对于定义瞬时频率是不充分的。

根据Ville定义，瞬时频率的概念是建立在平均意义上的。式（4.56）和式（4.57）是时间上的无穷积分，则其是无穷积分上的平均值。利用时频分布在每个时间点上确定的平均频率，不是真正的瞬时频率，即

$$f(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f\rho(t,f)\,\mathrm{d}f}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t,f)\,\mathrm{d}f} \tag{4.62}$$

在参考文献［20］中，$\rho(t, f)$ 是时间自相关函数的傅里叶变换。在图4.4中，每一个瞬间应该均有两个瞬时频率 ω_1 和 ω_2。定义中固有的平均化效果不仅将平稳信号中的两种频率取均值，而且非平稳信号中会错误地和不符合常理地解读带有负值瞬时频率的信号。毫无疑问，平均频率和瞬时频率是两个不同的概念。在某一个时刻，只能有一个平均频率但会有许多个瞬时频率。Ville定义可以很好地分析单组分信号，但是在解决多组分的信号上存在困难，因为Ville定义会失去判断力，接着将所有提交的频率（在无穷积分的意义上）取平均值作为瞬时频率。Oliveira和Barroso[9]认为："……在前面的例子中（即图4.4）所遇到的困难不是传统瞬时频率定义存在本质问题，而是概念误用的直接结果。"因为所研究的信号有两个分量，所以对于问什么是多组分信号的瞬时频率毫无意义，基本原因是多组分信号不存在一个瞬时频率，而是在每个时刻它均有几个瞬时频率。此外，他们认为，将一个信号分离成一组不同的组分仍会保留其所有性质，因此"部件"的数量不是该定义物理性的关键。这些见解是有见地的，但遗憾的是其同时存在误导性。通过前面的例子说明，解决各种困难和歧义的关键在于应该找到一个可行的分解方案，而从平均频率的概念到发展和制定另一定义的瞬时频率均缺乏这一点。Boashash[5]也得出相同的结论，即Ville定义仅对于只有一个频率或频率变化范围窄的单组分的时间函数具有物理意义。对于多组分的信号而言，单值瞬时频率的概念就变得毫无意义，因而需将其分解。所以，分解方法主要是将多组分信号分解成相应的单组分子集，而不是模糊或删除信号的物理要素，这说明瞬时频率的传统定义是完善的，并均适用于单组分和多组分的信号。

根据参考文献［21］可知，瞬时频率的传统定义并不适用于非对称数据。多组分信号一定不是对称的，但根据定义和要求单组分的子集在时间上是对称的。回顾一下式（4.51）的解析信号，其具有 $a(t)\exp(\mathrm{i}\phi(t))$ 的形式，这说明信号的物理意义是

$a(t)$ 和 $\phi(t)$ 分别对应振幅和频率的调制。如果 $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 的频谱未在频率上分离，则信号的希尔伯特变换会导致相位失真[5]。多组分信号通常是宽带，且 $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 的频谱不会重叠。这就是瞬时频率的传统定义不适用于多组分信号分析的原因之一。由于基于希尔伯特变换的分析方法更近似于较窄带宽的信号，信号越接近窄信号，传统定义法估计的瞬时频率就越是准确。因此，为了找到多组分信号中真实频率的进展，需要将许多信号的耦合部件分解转换成独立的固有成分。

因此，将多组分信号的瞬时频率定义为全局特征。其特征是由信号中与所有独立分量相关联的瞬时频率所描述的，并且每一个分量的瞬时频率均可由传统定义法来唯一确定。瞬时频率的数量与信号中单组分的数目相同。例如，信号 $x(t)=\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$可被分解成两个不同的部分，即

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\text{和}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right) \tag{4.63}$$

对单独分解的组分和两个瞬时频率$\dfrac{(\omega_1+\omega_2)}{2}$和$\dfrac{(\omega_2-\omega_1)}{2}$应用 Ville 定义，则该信号就可以容易地解决。

Ville 定义允许所有频率组分的时间演变可由任一时刻相对应的瞬时频率表示，则单组分和多组分的信号均具有充分的特征，因此，Ville 定义是一个强大的有效分解的工具。在下一节中，一种有效的多组分信号的分解方法将被引入讨论，同时，将信号去耦转化到其单组分子集的方案的可行性将用图 4.3a 和图 4.4a 中的两个例子来证明。

4.6.3　多模结构的分解

如上所述，瞬时频率的传统定义只对单组分信号有意义。为了研究多组信号的时变特征，该信号必须被分解成其单组分的子集，从而使所有固有组分的瞬时频率能根据传统定义确定下来。为了回答如何提取这些组分的问题，并且同时避免分解步骤变成仅仅是“任意”人为规定的情况，则当务之急是先要解决以下两个问题的答案：如何定义多组分信号的固有组分？为什么它们具有独立的物理意义？

首先确认具有物理意义组分有什么属性，再从幅值和频率调制的角度看，单组分信号在任何时刻内应具有且只有一个瞬时频率。而且它的振幅调制和频率调制应是完全分开的，该现象意味着它们各自的频谱不重叠。然而，仅仅根据信号的频谱无法识别信号是单组分还是多组分信号。因此对于所有的组分，需要对相应的信号使用希尔伯特变换。频率调制需跟随振幅调制被解调，这样确保了运用希尔伯特变换方法后能有效地估算瞬时频率。换言之，所得解析信号 $a(t)\exp(\mathrm{i}\phi(t))$中 $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 的频谱需要完全分离。振幅调制和频率调制两者之间的关系取决于协方差，其定义为[3]

$$\mathrm{Cov}_{t\omega}=\langle t\phi'(t)\rangle-\langle t\rangle\langle\omega\rangle \tag{4.64}$$

式中

$$\langle t\phi'(t)\rangle=\int t\phi'(t)\,|s(t)|^2\mathrm{d}t \tag{4.65}$$

$$< t > = \int t \mid s(t) \mid^2 \mathrm{d}t \tag{4.66}$$

$$< \omega > = \int \omega \mid S(\omega) \mid^2 \mathrm{d}\omega \tag{4.67}$$

同时，$<t\phi'(t)>$是时间与瞬时频率乘积的平均值（都在无限积分的意义上）。如果时间和频率上是不互相依赖的，由于$<t\phi'(t)>$等于$<t><\phi'(t)> = <t><\omega>$，则协方差 $\mathrm{Cov}_{tw}=0$。对于对称的信号，振幅和频率调制之间的协方差为0[3]，这意味着振幅和频率调制完全被解调。因此关于多组分信号的固有组分的对称性似乎是可取的。

固有组分可以表示为一个解析信号 $z_j(t) = a_j(t)\exp(\mathrm{i}\phi_j(t))$，其中下标 j 表示各个部件，因此 $z(t) = \sum_{j=1}^{n} z_j(t)$ 。在任意时刻应该只有一个频率，并且其频率和振幅两者都可随时间发生变化。考虑该组分为以下四种可能的物理情形：

1）未经过振幅和频率调制，信号的解析组分为正弦信号：

$$z_j(t) = a_j\exp(\mathrm{i}\omega_j t),\quad a_j\text{和 }\omega_i\text{是常数} \tag{4.68}$$

2）没有经过振幅调制，但是使用了频率调制，解析的组分为

$$z_j(t) = a_j\exp(\mathrm{i}\phi_j(t)), a_j\text{是常数} \tag{4.69}$$

3）经过振幅调制，但没有使用频率调制，解析的组分为

$$z_j(t) = a_j(t)\exp(\mathrm{i}\omega_j t),\ \omega_j\text{是常数} \tag{4.70}$$

4）经过振幅和频率调制，信号的解析组分为

$$z_j(t) = a_j(t)\exp(\mathrm{i}\phi_j(t)) \tag{4.71}$$

对于简单的情形1和2，根据定义，解析信号的实部在时间上必须是对称的。只要 $a_j(t)$ 的频谱能很好地从 ω_j 分离（或远低于 ω_j），情形3同样也是相同的，即解析信号的实部是对称的。由此类推，如果 $a_j(t)$ 的频谱很好从 $\phi_j(t)$ 的频谱分离（比 $\phi_j(t)$ 低得多），情形4中解析信号的实数部分也是对称的。但应当注意的是，根据定义，如果解析信号的实部是对称的，那么它对应的虚部在时间上也是对称的。因为对称信号的时间-频率的协方差是0，则可以良好地分离 $a_j(t)$ 和 $\phi_j(t)$ 的频谱。综上所述，满足对称的条件对建立多组分信号固有组分的内在要求具有意义。

Huang 等[21]提出了一种能够将多组分信号分解成内在组分的解调方法，后被称为经验模态分解（EMD）。它根据任意信号是由许多简单的振荡固有模式组成的这一简单假设发展而来。每个模式具有相同数量的极值和过零点，并且相对于一局部均值来说固有的振荡是对称的。不需要根据时间尺度，局部均值由最大包络和最小包络来确定。根据这种局部均值，不同时间尺度的模式均可被分离。一旦分离，每种模式均相互独立。同时所有模式在连续的过零点之间不存在极值。因此，在以下条件中，每个分离的模式可以被视为一个固有模态函数（IMF）：

1）在全部数据集合中极值的数目和过零点的数目必须相等或最多有一个不同。

2）在每一点上，由局部极大值决定的包络线和局部极小值确定的包络线的均值为0。

这两个条件完全符合我们对什么是固有组分的需求的认识。

IMF 表示一个简单的振荡模式。给定 IMF 所需的两个条件，而第一个 IMF 可以使

用以下步骤来提取：

1）采用光滑函数，确定并连接信号 $x(t)$ 所有的局部极大值，以获得最大包络函数 $\max(t)$。确定并连接信号 $x(t)$ 所有的局部极小值，则可得最小包络函数 $\min(t)$。最后，令 $\mathrm{mean}_1(t)=(\max(t)+\min(t))/2$。

2）将原始信号 $x(t)$ 减去 $\mathrm{mean}_1(t)$，则 $s_1(t)=x(t)-\mathrm{mean}_1(t)$。

3）在 $s_1(t)$ 基础上，重复上述步骤1）和2），得到 $\mathrm{mean}_2(t)$ 和 $s_2(t)$。然后在 $s_2(t)$上，又可得到 $\mathrm{mean}_3(t)$ 和 $s_3(t)$。保持递归重复的步骤1）和2）直到得到$sn(t)$。可以看出，其满足IMF的两个条件。记 $C_1(t)=sn(t)$，同时原信号 $x(t)$ 与所述第一条件IMF的差为 $d_1(t)=x(t)-C_1(t)$。

上述信号的筛选过程如图4.6所示。重复上述步骤，可以得到 $C_2(t)$ 和 $d_2(t)$，$C_3(t)$和 $d_3(t)$，…，$C_n(t)$ 和 $d_n(t)$，直到 $d_n(t)$ 具有少于两个极值或无IMF可提取。记 $R(t)=d_n(t)$，就是所谓的残基。从而所有的IMF$C_1(t)$，$C_2(t)$，…，$C_n(t)$ 和残基 $R(t)$ 的集合还原回原始信号 $x(t)$，即

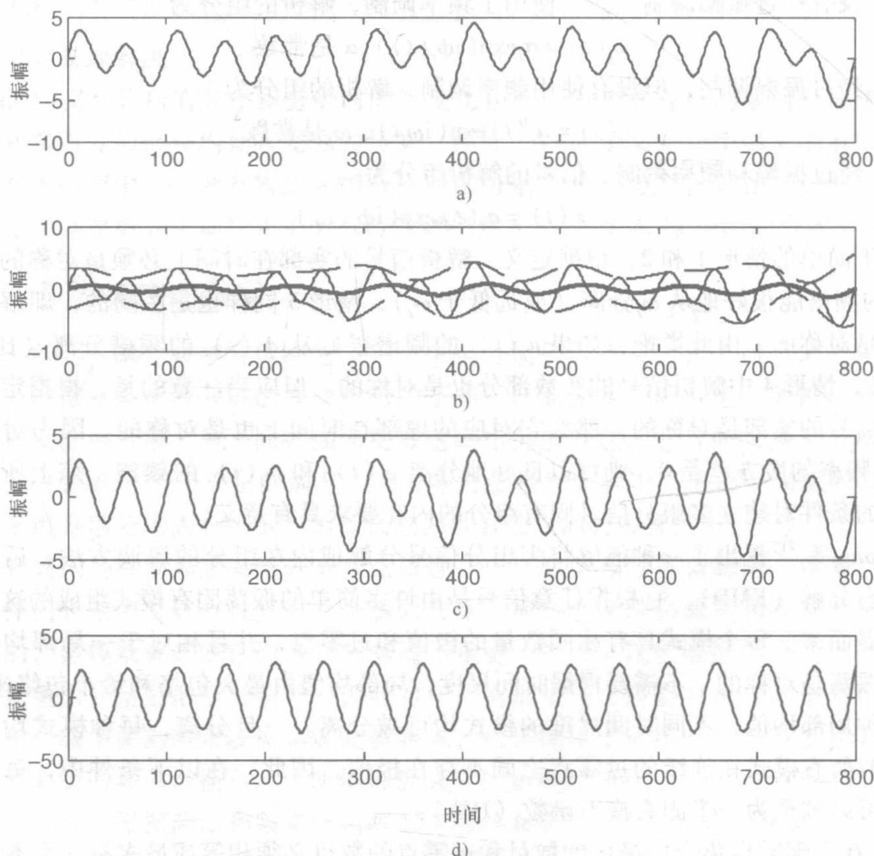


图 4.6

a）时域信号 b）原始信号（—），以及它的最大包络和最小包络（┄）与它的局部平均值（—） c）$s_1(t)$ 是筛选后的结果 d）表示获得的第一个固有模态函数

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j(t)+R(t) \tag{4.72}$$

该筛分过程具有两个目标：一是去除骑行波，二是使信号图更加对称[21]。可以从下列所述的分析看出，第一个模式具有最小的时间尺度，即包含最高的频率分量。随着继续分解，IMF 的频率分量变小。残基应该是几乎没有任何频率分量的。简单地说，该分解是基于所述数据的局部特征时间尺度，从而产生自适应的基础，因此它不需要一组固定的时间尺度。显然，EMD 对于分析非线性非平稳信号具有很高的可行性。

当所有的固有组件可用时，相应的单组分分析信号可以使用希尔伯特变换来建立。根据式（4.53）和式（4.55）可知，得到的解析信号可以用于确定对应的瞬时频率和振幅调制。原始信号 $x(t)$ 现可表示为

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\exp(\mathrm{i}\int\omega_j(t)\,\mathrm{d}t) \tag{4.73}$$

或者也可以使用其傅里叶展开信号：

$$x(t)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\exp(\mathrm{i}\omega_j t) \tag{4.74}$$

式（4.52）中的希尔伯特变换可以表示为关于 $1/t$ 的 $x(t)$ 的卷积，从而强调了 $x(t)$时间局部性的属性。式（4.71）所示的极坐标进一步明确了所表达的局部性质。从式（4.73）和式（4.74）可以看出，希尔伯特变换的表达式揭示了三角函数 $x(t)$ 的振幅变化和相位变化的性质，然而傅里叶变换表达式无法显示振幅变化的属性。

从式（4.72）可明显看出，在数学理论上其可被完全分解。然而，由最大和最小包络线得到的局部均值不完全是数学平均值，通过重复上述的变换过程可依次获得所有的 IMF。严格来说，其在数学意义上不是相互正交的。然而，IMF 两个条件，即在时间上对称并且过零点之间没有多极值，满足上述两个条件即可确保 IMF 几乎都是正交的。这表明了 $c_i(t)$ 和 $c_j(t)$ 的内积，以及 $c_i(t)$ 与 $x(t)-c_j(t)$（其中 $i\neq j$）的内积均为 0。因此，虽然局部均值不是真正的平均值，但其可以被完全分解且是正交的。此外，式（4.72）表明了多组分信号可用各自振幅变化和频率变化的单组分信号来表示，其中振幅调制和频率调制是完全分离的。根据等式也可在三维图内将瞬时频率和相应的振幅绘制成时间函数。例如，振幅可绘制在瞬时时间-频率平面。同时，该振幅下的时间-频率分布需要与普通的傅里叶频谱区分开来，并将其命名为希尔伯特振幅频谱，记作 $H(\omega,t)$[22]。

4.6.4 瞬时频率的示例

本节中所示的例子具有示范性。图 4.7a 所示的是双组分信号，与图 4.4a 所示信号相同。根据之前定义的变换过程可知，两个固有模式表示一个零信号。应注意的是，所获得的两个组分 C_1 和 C_2 是两个正弦信号。利用瞬时频率的传统定义解决两个固有模式，可获得图 4.7b 中两点的瞬时频率，这两个瞬时频率是不被平均或隐藏的。EMD 允许多个组分（或模式）被固有信号（式（4.72）所示信号）的固有时间刻度所分离。分量的特征在于它的固有时间尺度，这个结论也很符合人的认知直觉。根据希尔

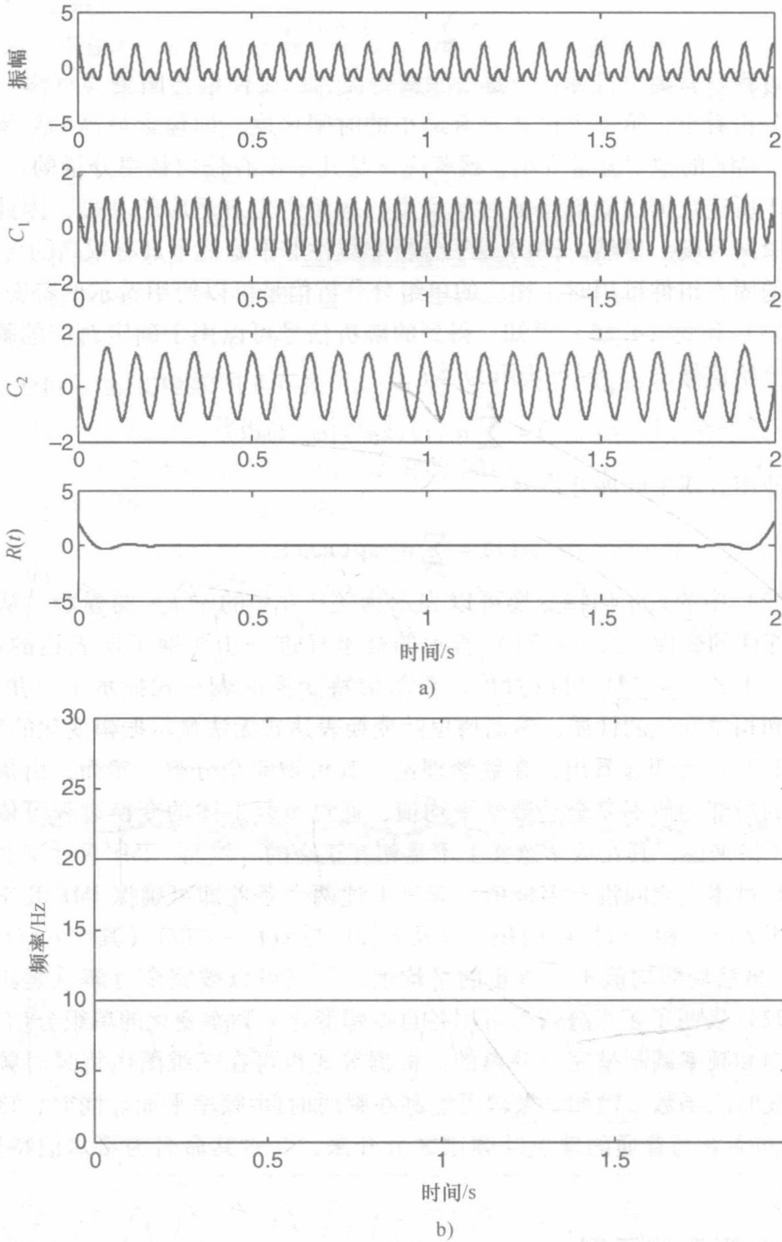


图 4.7

a）使用经验模式分解（EMD）得到的一个不等幅的双组分信号和它的两个物理成分

b）利用信号的两个组分确立的两个瞬时频率

伯特变换中时间的局部化和一段时间内提取的该模式的相位信息，由该模式的相速度可估算出其瞬时频率。

瞬时频率和其振幅调制揭示了在两个示例系统内的所有频率组分的发展，同时可

以研究系统的物理特性。根据参考文献［9］所述，参考文献［12］中的四个条件可检验并证明瞬时频率的定义，即每一个分离后的固有组分可完全满足所有条件。此定义对所有固有组件和其对应的瞬时频率均赋予了具体的物理含义。

Cohen[3]总结了五条关于瞬时频率概念的悖论，即解析信号中相位相对于时间的导数。通过对图4.3和图4.4所示的双组分信号的观察，Cohen发现：①计算得到的瞬时频率不是频谱中的频率；②频谱的轨迹只包括一些尖锐的频率，而瞬时频率是连续的，且在一个无限量的值范围内；③虽然解析信号的频率响应对于负频率均表示成0，但瞬时频率偶尔会是负值；④该信号受到带宽的限制，然而所估算的瞬时频率会在带宽之外。

Cohen总结，其根源都在于一个事实，即瞬时频率的概念只适用于物理上的单组分信号，无法应用在多组分信号。因为根据定义，瞬时频率是一个有条件的平均频率。与该信号所有的固有组分相关联的瞬时频率是“平均的”，并误认为是一个带有周期性尖峰的模糊频率，以及其结果偶尔会超出带宽变成负值。从那些多组分信号的例子可以看出，信号可被分解成单组分固有子集，并通过运用Ville定义将瞬时频率提取至单个子集中，这显然是一个有效的模式分解方法，其可最终解决上述的所有悖论。通过消除长期存在的模糊和困难之处，经验模式分解法使瞬时频率的Ville定义具有普遍性。如果不具有普遍性，即无法同时适用于单组分和多组分的信号。然而，一些问题依然存在。例如，该定义下的瞬时频率能否与傅里叶定义的瞬时频率联系起来？或者两者是完全不同的两个概念？由于正弦信号的瞬时频率与傅里叶定义的频率，两者是一致的，所以才猜想这两个概念是相关的。如果是这样的，如何准确定义瞬时频率的能量？又如何将其与傅里叶频率的能量联系起来？Huang等指明瞬时频率的能量是与振幅调制相关的[21]。然而，还需要更多这方面的细节来证明该理论。

4.6.5 非线性响应的特性

分叉是从一个动态状态运动到另一个状态，并且伴随新的模式出现，或旧的模式消失或两者兼有。更具体地说，周期运动仅包含一个频率分量（连同它的谐波），准周期运动至少有两个不相称的频率（连同它们的谐波），混沌运动有一个宽带频谱。因此，周期、周期倍数、准周期或混沌运动可通过它们各自的频谱辨别。这是基于傅里叶的方法常结合时域法来对分叉进行区分的原因之一。然而，傅里叶变换是线性的，并且其分析谐波函数是固定的，故频域法对非线性的时变信号是不适用的，这是因为瞬时频率中的频率会随时间发生变化，分叉和不稳定状态的区分可以通过检测瞬时频率和相应幅值识别。通过对比新旧模式的瞬时频率，可以确定分叉类型。例如，如果新模式的瞬时频率是旧模式频率的一半左右，则是周期的倍数；如果新旧模式的瞬时频率无关联，则是准周期分叉。同理，可以类似地定义间歇性、临界和混沌运动。

如何用瞬时频率量化动态非线性运动的分叉和混沌响应？其中一个方法可以通过观察瞬时频率分量和其相对应能量随时间变化的趋势来确定其动态状态。因为时间量对定位偏差是极其重要的，这就要求将当前的瞬时频率分量与之前的分量进行比较分

析。为了避免定性的比较，从开始时刻 t_0 至选定的结束时刻 t_1 间的所有瞬时频率分量的累计权值可用如下的频率函数计算：

$$h_{01}(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} H(\omega,t)\,\mathrm{d}t \tag{4.75}$$

式中，h_{12}（ω），h_{23}（ω），…可以分别在 t_1 和 t_2，t_2 和 t_3，…时刻中类似地计算出。式(4.75）的思路是源于在时间范围内估算的所有谐波分量权值的傅里叶变换，然而，式(4.75）中的边际谱阐述了完全不同于傅里叶频谱方法的频率含义。在傅里叶变换中，就好像在整个时间过程中存在特定的正弦分量，解释了谐波中能量的存在。另外，边际谱仅给出了概率意义下在规定时间范围内的所有瞬时频率分量的累计权值，这考虑了频率分量出现的概率。

如果在 t_1 时刻之前是周期运动，则 $h_{01}(\omega)$ 将只有一个峰值。如果在 t_1 和 t_2 之间出现分叉，则会出现新的模式且将是 $h_{12}(\omega)$ 中新的频率分量。由于第二频率分量的出现及其幅值的变大，这易于在时间-频率同步的平面内实现。如果动态稳定性允许 t_2 时刻后可进一步恶化到最终混沌状态，则在具有显著带宽特性的边际谱 $h_{23}(\omega)$ 中将出现更多的频率分量。另外，在时频面或从任一时刻 t 的边际谱上，易于解决所有频率分量的幅值变化。因此，不同频率分量的累计值可以用来描述非线性系统，也可以量化系统的分叉和混沌响应。综上所述，分叉发生的确切时刻可以由更多精确的边际谱来确定。在瞬时时频域内还可采用运算量更小的方法实现相同的目标。

接下来将举例说明如何使用瞬时频率来对分叉和非线性的响应进行检测和辨别。例如，一个延时振荡器显示叉式分叉和其他类型的分叉作为非线性反馈的结果，其时间延迟方程为

$$\begin{aligned}&\ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 \dot{x}^3 \\ &= k\cos(\Omega t) + \beta_1[\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)] + \beta_2[\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)]^3\end{aligned} \tag{4.76}$$

式中，假定系统参数 α、β 及其倍数和 k 均是正的，Ω 是外部驱动频率，给定 $\omega_0^2 = 10.0$，$\alpha_1 = 12.2$，$\alpha_2 = 0.3$，$\beta_1 = 6.5$，$\Omega = 2.0$，参考文献［23］研究了强制周期（k 的倍数）和非线性反馈（β_2的倍数）不同的设置。

在图 4.8 中，β_2为 0.1，k 是从 1 到 10 线性增加，用来增加 $x(t)$ 响应历程的时间步长 $\Delta t = 0.001\mathrm{s}$，$k$ 和 β_2 在第一个 25000 的时间步长处保持恒定。在 $t = 25\mathrm{s}$ 启动，周期性强制参数在接下去的 20s（时间步长为 20000）线性增加到其最终值，只考虑 $t = 25\mathrm{s}$ 后整个时间响应的那部分。从图 4.8b 中可知，当 k 比较小时，驱动频率（$f = 1/\pi$）是还未完全驱动的。图 4.8b 中，由于两个不相称的模式展示了准周期运动的特性，使用 EMD 解决了两个 IMF。图中只有一个振荡周期大约为 0.4s 的时间模态结构，由于任何一种模式在 19s 窗口下观察是没有误差的，所以对于周期性强制幅值从 1.0 到 10.0 的不断增加，将不会出现分叉或进一步动态的变化。另外，强制频率的累计效应变得更加突出，而固有频率的效应同边际谱 $h_{i,i+1}(\omega)$ 仍然相同。

瞬时频率的概念对分析非线性非稳态信号具有较高的实用意义，因为它们的频谱

特性随时间变化，而传统的基于傅里叶分析还不足以解析多组分信号各自频谱分量的时间进程。Ville 定义的瞬时频率适用于单组分信号。然而，这个定义对于多组分信号无法做出合理的解析。该定义实现了无界的瞬时频率或多组分信号的负振幅，两者均违背了对瞬时频率的直观理解。由于每日调查的信号大多是非稳定和多组分的，审查后的和具有物理意义的瞬时频率的定义有更广泛的应用。

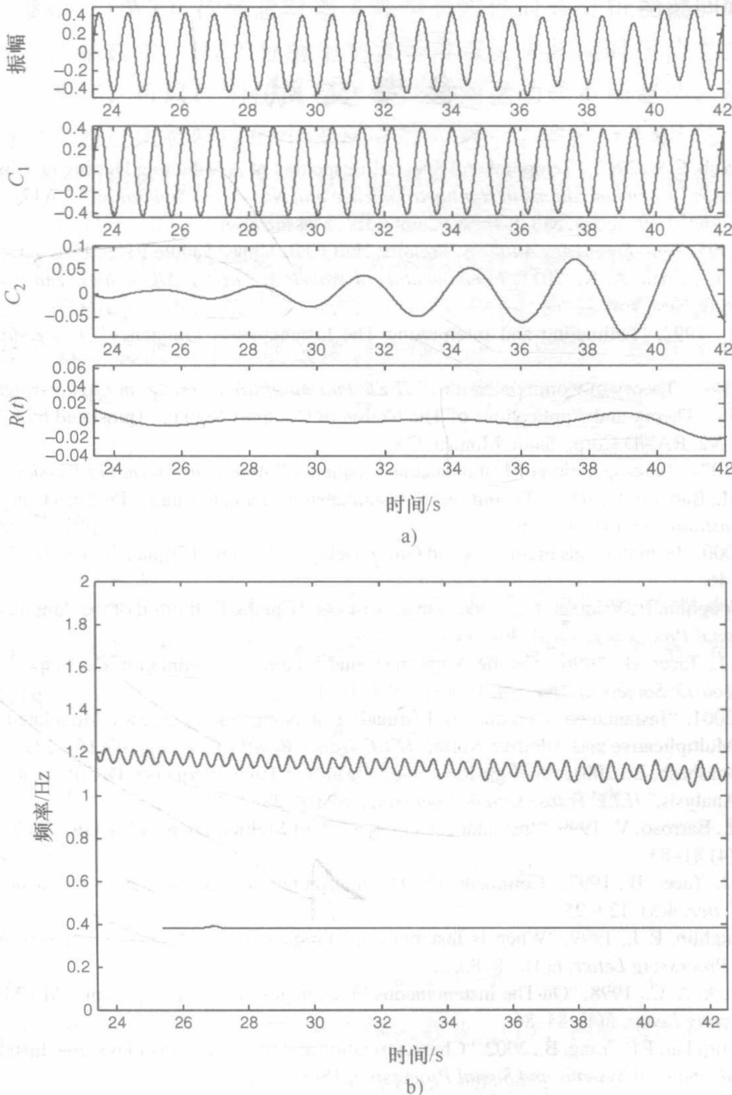


图 4.8

a）动态响应和其分解后的固有模式：当 $\beta_2=0.1$ 且 k 值从 1.0 变化至 10.0

b）关联的瞬时频率对应的所有 IMF $C_1 \sim C_2$

本章用几个例子简单地分析了与使用 Ville 定义的瞬时频率相关的问题，提出一个

可行的解决方案。分解方法即把多组分信号分解成其相关的单组分信号子集，而将Ville定义应用于信号子集中，从而在信号中成功提取出固有的瞬时频率。该方法解决了瞬时频率定义应用中常见的难点，因此其对分析和研究非线性系统是非常重要的。

对本书余下的章节来说，瞬时频率的基本概念是一种可选工具。本章中所有非线性响应的基本特性可以应用在第6~11章，进而说明动态不稳定性和切割不连续性，如粘滑现象和间断性。

参考文献

[1] Liu, M.-K., Suh, C.S., 2012, "Temporal and Spectral Responses of A Softening Duffing Oscillator Undergoing Route-To-Chaos," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 17(12), 5217–28.

[2] Wiener, N., 1964, *Time Series*, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.

[3] Cohen, L., 1995, *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey.

[4] Goswami, J. C., Chan, A. K., 2011, *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, John Wiley and Sons, New York.

[5] Boashash, B., 1992, "Estimating and Interpreting The Instantaneous Frequency," *Proceeding of IEEE*, 80, 520–68.

[6] Gabor, D., 1946, "Theory of Communications," *IEEE Journal of Communication Engineerings*, 93, 429–57.

[7] Ville, J., 1958, "Theory and Applications of The Notion of Complex Signal," Translated by I. Seline in *RAND Tech. Rept. T-92*, RAND Corp., Santa Monica, CA.

[8] Mandel, L., 1974, "Interoperation of Instantaneous Frequency," *American Journal of Physics*, 42(10), 840–46.

[9] Oliveira, P. M., Barroso, V., 2000, "Definitions of Instantaneous Frequency under Physical Constraints," *Journal of Franklin Institute*, 337(4), 303–16.

[10] Cohen, L., 2000, "Instantaneous Frequency and Group Delay of A Filtered Signal," *Journal of Franklin Institute*, 337(4), 329–46.

[11] Cohen, L., Loughlin, P., Vakman, O., 1999, "On an Ambiguity in the Definition of the Amplitude and Phase of a Signal," *Signal Processing*, 79(3), 301–7.

[12] Loughlin, P. J., Tacer, B., 1996, "On the Amplitude- and Frequency-Modulation Decomposition of Signals," *Journal of Acoustic Society of America*, 100(3), 1594–1601.

[13] Barkat, B., 2001, "Instantaneous Frequency Estimation of Nonlinear Frequency-Modulated Signals in The Presence of Multiplicative and Additive Noise," *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(10), 2214–22.

[14] Barkat, B., Boashash, B., 2001, "A High-Resolution Quadratic Time–Frequency Distribution for Multicomponent Signal Analysis," *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(10), 2232–39.

[15] Oliveira, P.M., Barroso, V., 1999, "Instantaneous Frequency of Multicomponent Signals" *IEEE Signal Processing Letter*, 6(4) 81–83.

[16] Loughlin, P. J., Tacer, B., 1997, "Comments On The Interpretation of Instantaneous Frequency," *IEEE Signal Processing Letter*, 4(5), 123–25.

[17] Nho, W., Loughlin, P. J., 1999, "When Is Instantaneous Frequency The Average Frequency At Each Time?" *IEEE Signal Processing Letter*, 6(4), 78–80.

[18] Wei, D., Bovick, A. C., 1998, "On The Instantaneous Frequencies of Multicomponent AM-FM Signals," *IEEE Signal Processing Letter*, 5(4), 84–86.

[19] Suh, C.S., Khurjekar, P.P., Yang, B., 2002, "Characterization and Identification of Dynamic Instability in Milling Operation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), 829–48.

[20] L. Cohen, 1996, "Generalized Phase-space Distribution," *Journal of Mathematical Physics*, 7(5), 781–86.

[21] Huang, N.E., Shen, Z., Long, S. R., *et al.*, 1998, "The Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectrum for Nonlinear and Nonstationary Time Series Analysis," *Proceedings of Royal Society, London Series A*, 454(1971), 903–95.

[22] Yang, B., Suh, C. S., 2003, "Interpretation of Crack-Induced Rotor Nonlinear Response Using Instantaneous Frequency," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(3), 491–513.

[23] Yang, B. and Suh, C.S., 2004 "On The Nonlinear Features of Time-Delayed Feedback Oscillators," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 9(5), 515–29.

第 5 章　小波滤波器组

离散小波变换（DWT）的概念对第 7 章中非线性时频分析控制非常重要，在时频分析控制的总体结构中，DWT 分解用来表示没有失去相应时序信息的频谱分辨率的不同电平动态响应，可以识别任何有异常现象的扰动或不稳定性，然后适当地映射到小波区间中。通过更新响应的小波表现形式的一个滤波-x LMS 的自适应算法来实现响应调节，这些描述综合起来是为反应满足特定控制对象的控制输出的有条件响应。因此，掌握 DWT 的工作原理和 DWT 实现的基础知识，对完全理解非线性时域分析至关重要。作为时域分析控制的一种物理组成部分，DWT 分解算法和相应的合成算法组成了常用的二进制法[1]。DWT 和 IDWT 的各种基本特征使得它们能被应用在快速计算的数字滤波器中，通过多分辨率分析（MRA）的基本概念可以很好地理解这些属性。在本节中，将对小波进行一个简洁全面的分析，先以 Haar 小波为例。

5.1　小波实例

函数 $f(t) \in (-\infty, \infty)$ 可以用一个二进制原理的小波基函数 $\psi(t)$ 表示，在式（4.36）中通过 $a=2^{-m}$ 和 $b=n2^{-m}$ 来替换扩大和变换参数，其中 m、n 为整数。一般的离散小波变换为

$$\begin{aligned} d_{m,n} &= W_{\psi}f(n2^{-m}, 2^{-m}) \\ &= 2^{m/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \hat{\psi}(2^m t - n)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \hat{\psi}_{m,n}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.1}$$

式中，缩放和平移的小波函数可以表示为

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\hat{\psi}(2^m t - n) \tag{5.2}$$

式（5.2）表示一组正交函数 $\hat{\psi}_{m,n}(t)$ 和对偶函数 $\psi_{m,n}(t)$，两者满足以下条件：

$$< \psi_{m,n}(t), \hat{\psi}_{k,l}(t) > = \delta_{m,k}\delta_{n,l} \tag{5.3}$$

式中，$\delta_{m,k}$ 为 Kronecker 函数，定义为

$$\delta_{m,k} = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \tag{5.4}$$

同时

$$d_{m,n} = < f(t), \psi_{m,n}(t) > = < f(t), \hat{\psi}_{m,n}(t) > \tag{5.5}$$

在 $\hat{\psi}_{m,n}(t)=\psi_{m,n}(t)$ 的情况下，$\psi_{m,n}(t)$ 是标准正交，$f(t)$ 的分段近似为

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_{m,n}\psi_{m,n}(t) \tag{5.6}$$

为了对用离散小波变换的函数 $g(t)\in L^2(\boldsymbol{R})$ 的式（5.2）提出一个合理的说明，定义简单的分段常数函数 $\phi(t)$：

$$\phi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5.7}$$

$\phi(t)$ 是正交集合，因为

$$\int\phi(t-m)\,\bar{\phi}(t-n)\,\mathrm{d}t=\delta_{m,n} \tag{5.8}$$

另外，$\phi(t)$ 的缩放和平移也满足正交的条件：

$$\begin{aligned}\int\phi_{m,n}(t)\,\bar{\phi}_{k,l}(t)\,\mathrm{d}t&=\int\{2^{m/2}\phi(2^m t-n)\}\{2^{k/2}\bar{\phi}(2^k t-l)\}\,\mathrm{d}t\\&=\delta_{m,k}\delta_{n,l}\end{aligned} \tag{5.9}$$

式（5.9）和式（5.6）表示 $g(t)$ 至少可以通过基本函数 $\phi(t)$ 的两个不同版本近似得到

$$g(t)\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{0,n}\phi_{0,n}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{0,n}\phi(2^0 t-n) \tag{5.10}$$

和

$$g(t)\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{1,n}\phi_{1,n}(t)=2^{1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{1,n}\phi(2^1 t-n) \tag{5.11}$$

式中，$c_{0,n}$ 和 $c_{1,n}$ 分别与尺度系数 $m=0$ 和 $m=1$ 有关，由于 $\phi(2t-n)$ 只是 $\phi(t-n)$ 的一半，是 $g(t)$ 的两个近似值，则式（5.11）将有较小的近似误差。总之，$\phi(2t-n)$ 比 $\phi(t-n)$ 具有更好地近似分辨率，由以下式子可以更好地证明：

$$\phi(t)=\phi(2t)+\phi(2t-1) \tag{5.12}$$

式中，低分辨率基本函数 $\phi(t)$ 可以完全由高分辨率的基函数 $\phi(2t)$ 来表示。因此，如果用 V_1 表示 $2^{1/2}\phi(2^1 t-n)$，同时用 V_0 表示 $2^0\phi(2^0 t-n)$，那么 V_0 近似为 V_1 的一个子集，即

$$V_0\subset V_1 \tag{5.13}$$

由式（5.12）和式（5.13）必然可以得到

$$\phi(2t)=c_0\phi(t)+d_0\psi(t) \tag{5.14}$$

式中，c_0 和 d_0 是常数，$\psi(t)$ 是提供所有详细信息的函数，而不是 $\phi(t)$。满足式（5.14）的 Haar 小波函数 $\psi(t)$ 对应式（5.7）中的分段函数 $\phi(t)$，定义为[2]

$$\psi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2}\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant t<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5.15}$$

分段函数$\psi(t)$也是正交集合，同$\phi(t)$具有相似的性质。

$$\int \psi(t-m)\bar{\psi}(t-n)\mathrm{d}t = \delta_{m,n} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\int \psi_{m,n}(t)\bar{\psi}_{k,l}(t)\mathrm{d}t &= \int \{2^{m/2}\psi(2^m t-n)\}\{2^{k/2}\bar{\psi}(2^k t-l)\}\mathrm{d}t \\ &= \delta_{m,k}\delta_{n,l}\end{aligned} \tag{5.17}$$

在满足以下条件时，$\psi(t)$和$\phi(t)$相互正交。

$$\int \phi(t-m)\bar{\psi}(t-n)\mathrm{d}t = \delta_{m,n} \tag{5.18}$$

另外

$$\phi(2t) = \frac{1}{2}\phi(t) + \frac{1}{2}\psi(t) \tag{5.19}$$

且

$$\phi(2t-1) = \frac{1}{2}\phi(t) - \frac{1}{2}\psi(t) \tag{5.20}$$

从式（5.19）和式（5.20）可以得到类比，即可用式（5.14）的n下标转换得式（5.11）中$g(t)$的近似值：

$$\begin{aligned}g(t) &\approx 2^{1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{1,n}\phi(2^1 t-n) \\ &= 2^{1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{c_{1,2n}+c_{1,2n+1}}{2}\right)\phi(t-n) + \left(\frac{c_{1,2n}-c_{1,2n+1}}{2}\right)\psi(t-n)\right]\end{aligned} \tag{5.21}$$

因此，如果$2^0\psi(2^0 t-n)$的范围用W_0来表示，根据近似分辨率和相关情况，式（5.21）说明W_0与V_1中的V_0在空间中正交互补，即

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \tag{5.22}$$

式中，W_0也是V_1中的一个子集，即

$$W_0 \subset V_1 \tag{5.23}$$

5.2 多分辨率分析

从上面的例证可得，用基函数$2^{m/2}\phi(2^m t-n)$定义$L^2(\boldsymbol{R})$的子集空间矢量V_m。对于任意$g(t)\in V_m$，有

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n}\phi_{m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n}\phi(2^m t-n) \tag{5.24}$$

$\phi(t)$满足尺度函数方程式（5.24）。式（5.24）一般包括所有可能的尺度整数$m\in\boldsymbol{Z}$，因此

$$\{0\}\cdots\subset V_{-2}\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset V_2\cdots L^2(\boldsymbol{R}) \tag{5.25}$$

并且

$$\text{如果 } g(t)\in V_m \text{ 那么 } g(2t)\in V_{m+1} \tag{5.26}$$

如果用V_0来表示$\phi(t)$，那么$\phi(t)\in V_1$。$\phi(t)$也可以通过$\phi(2t)$来定义，同样

地，$\phi(t)$ 接近于 $\phi(2t)$，得出

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n 2^{\frac{1}{2}} \phi(2t-n) \tag{5.27}$$

式中，h_n是尺度函数的系数。

式（5.27）是递归方程，一般也可称为多分辨率分析（MRA）方程。在式（5.12)的分段近似情况下，$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$。

为了使尺度函数 $\phi(t)$ 的频率表示在两个连续的尺度中，将傅里叶变换应用到式（5.27)中，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = 2^{\frac{1}{2}} \sum_n h_n \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t-n) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \Big] \tag{5.28}$$

对式（5.28）进行进一步简化：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = \boldsymbol{\Phi}(\omega) \tag{5.29}$$

进行一个简单的换元后，式子右侧可变为

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t-n) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \Big] &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\omega}{2})n} \Big) \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\omega}{2})\tau} \mathrm{d}\tau \Big] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{H}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) \boldsymbol{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) \end{aligned} \tag{5.30}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}(\omega)$ 是尺度函数 $\phi(t)$ 的傅里叶变换；$\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)$是尺度系数 h_n的离散傅里叶变换。因为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\omega}{2})n}$ 是一个卷积运算，且 $\boldsymbol{H}(0) \neq 0$，所以，$\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)$是低通滤波器的频率响应。从式（5.28）~式(5.30)，式（5.27）中的递归方程有下列等效光谱：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{H}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) \boldsymbol{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) \\ &= \Big[\frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{H}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) \Big] \Big[\frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{H}\Big(\frac{\omega}{4}\Big) \boldsymbol{\Phi}\Big(\frac{\omega}{4}\Big) \Big] \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{H}\Big(\frac{\omega}{2^j}\Big) \Big] \boldsymbol{\Phi}(0) \end{aligned} \tag{5.31}$$

如果 $\boldsymbol{\Phi}(0)$ 是明确定义的，式（5.31）表明尺度函数 $\phi(t)$ 的特点是低通滤波器 $\boldsymbol{H}(\omega)$。也就是说，$\phi(t)$ 可以通过低通滤波器 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 产生。

然后要考虑尺度函数与小波函数的产生有关系这一重要性质。假定 $\phi(t)$ 是基函数的正交集，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \bar{\phi}(t-n) \mathrm{d}t = \delta_{0,n} \tag{5.32}$$

根据 Parseval 定理，在谱域中对应的能量也可表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}(\omega)\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n}\mathrm{d}t = 2\pi\delta_{0,n} \tag{5.33}$$

式（5.33）中两边的整数 n 求和为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[2\pi\delta_{0,n}] = 2\pi \tag{5.34}$$

且

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}(\omega)\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n}d\omega\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}(\omega)\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n}]\mathrm{d}\omega \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}(\omega)\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-2n\pi)]\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{5.35}$$

等同于式（5.34）的最后一个方程：

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{\Phi}(\omega+2m\pi)|^2 = 1 \tag{5.36}$$

式（5.22）可以用三个连续的正交互补空间表示 V_2，即

$$\begin{aligned}V_2 &= V_1 \oplus W_1 \\ &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \\ &= V_{-1} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1\end{aligned} \tag{5.37}$$

根据式（5.25）可得，当范围靠近负无穷大，即 $m\to-\infty$，式（5.37）可表示为

$$L^2(\boldsymbol{R}) = \cdots W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \tag{5.38}$$

由于

$$W_{-\infty} \oplus \cdots W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 = V_1 \tag{5.39}$$

或者更普遍、简洁地表示为

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{k-1} W_j = V_k \tag{5.40}$$

通过由较低（更简略）尺度的尺度函数定义的空间有些差异，这些差异可以任意地被选择去定义较高尺度的尺度空间。如果 $\psi(t)$ 跨越差异，或空间 W_0，$W_0 \subset V_1$，那么 $\psi(t)$ 可以通过跨度空间 V_1 的尺度基函数来表示：

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n 2^{\frac{1}{2}}\phi(2t-n) \tag{5.41}$$

式中，g_n 是对应的系数，因为 W_j 是 V_j 和 $V_j \subset V_{j+1}$ 的正交补空间，可以通过式（5.18）的正交条件定义：

$$g_n = (-1)^n h_{1-n} \tag{5.42}$$

从上面的推导可得 $2^{m/2}\psi(2^m t-n)$，$\psi(t)$ 的缩放和平移会产生 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的子空间 V_m 的规范正交集，因此，对任意的 $g(t)$ 有

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{m,n}\psi_{m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{m,n}\psi(2^m t-n) \tag{5.43}$$

式中，$d_{m,n}$ 是通过下列内积运算决定：

$$d_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\bar{\psi}_{m,n}(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.44}$$

函数$\psi(t)$满足式（5.43）的小波函数，常数$d_{m,n}$由式（5.44）中小波级数系数确定。

式（5.25）和式（5.38）表示$L^2(\boldsymbol{R})$可以通过一组函数$\phi_{m,n}(t)$和$\psi_{m,n}(t)$生成，由于$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$且

$$L^2(\boldsymbol{R}) = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j \oplus \cdots \tag{5.45}$$

对于任何通过在V_j中的j尺度的尺度函数$f(t) \in L^2(\boldsymbol{R})$有

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n}\phi_{j,n}(t) \tag{5.46}$$

即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{l,n}\phi_{l,n}(t) + \sum_{m=l}^{j-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{m,n}\psi_{m,n}(t) \tag{5.47}$$

式（5.47）是$f(t)$通过比例和小波函数的展开式。也就是说，$f(t)$可以表示为$\phi_{l,n}(t)$和$\psi_{m,n}(t)$的线性组合。

由式（5.36）和式（5.31）的前半部分，可得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{\Phi}(\omega + 2m\pi)|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega + 2m\pi}{2}\right)\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega + 2m\pi}{2}\right)\right|^2 = 4 \tag{5.48}$$

通过分别考虑求和指数m的奇偶性，式（5.48）可以有以下不同的表达方式：

$$\begin{aligned}&\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega + 2m\pi}{2}\right)\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega + 2m\pi}{2}\right)\right|^2 \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega + l\pi}{2}\right)\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega + l\pi}{2}\right)\right|^2 \\ &\quad + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega + (2l+1)(2\pi)}{2}\right)\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega + (2l+1)(2\pi)}{2}\right)\right|^2\end{aligned} \tag{5.49}$$

因为频率响应h_n，$\boldsymbol{H}(\omega) = \boldsymbol{H}(\omega + 2\pi)$，也就是说，$H(\omega)$的周期为$2\pi$，则式（5.49）可以进一步表示为

$$\begin{aligned}&\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega + l\pi}{2}\right)\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega + l\pi}{2}\right)\right|^2 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega + (2l+1)(2\pi)}{2}\right)\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega + (2l+1)(2\pi)}{2}\right)\right|^2 \\ &= \left|\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega + l\pi}{2}\right)\right|^2 + \left|\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega + 2\pi}{2}\right)\right|^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega + (2l+1)(2\pi)}{2}\right)\right|^2 = 4\end{aligned} \tag{5.50}$$

因此，式（5.50）可以简化成一个恒等式方程得

$$|\boldsymbol{H}(\omega)|^2 + |\boldsymbol{H}(\omega + \pi)|^2 = 1 \tag{5.51}$$

或根据它们的复共轭可得

$$\boldsymbol{H}(\omega)\bar{\boldsymbol{H}}(\omega) + \boldsymbol{H}(\omega + \pi)\bar{\boldsymbol{H}}(\omega + \pi) = 1 \tag{5.52}$$

表明存在一个函数$\boldsymbol{G}(\omega) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\bar{\boldsymbol{H}}(\omega + \pi)$，形成正交镜像滤波器组[3] $\boldsymbol{H}(\omega)$并满足以下条件

$$H(\omega)\overline{G}(\omega)+H(\omega+\pi)\overline{G}(\omega+\pi)=0 \tag{5.53}$$

由于$G(0)=0$和$G(\pi)=1$，因此$G(\omega)$是一个高通滤波器。

读者可以证明式（5.41）中定义的小波函数$\psi(t)$有如下性质：

$$\boldsymbol{\psi}(\omega)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\prod_{j=2}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right] \tag{5.54}$$

式中，$\boldsymbol{\psi}(\omega)$是$\psi(t)$的傅里叶变换，且式（5.31）的结果是应用。因此$G(\omega)$是式（5.41）中满足式（5.42）中$h_n$的系数$g_n$的频率响应。

式（5.27）和式（5.41）是两尺度关系，用两个系数序列$\{h_n,g_n\}\in L^2(\boldsymbol{R})$，式（5.42）明确了其关系，一个可以产生两组对定义多分辨率分析（MRA）空间至关重要的正交基函数$\phi(t)$和$\psi(t)$，这可以通过考虑空间V_{j+1}和两个粗糙分辨率的正交互补空间V_j和W_j进一步说明。它们的关系定义为

$$\phi(2^jt)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_n\phi(2^{j+1}t-n) \tag{5.55}$$

$$\psi(2^jt)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n\psi(2^{j+1}t-n) \tag{5.56}$$

因此两尺度关系式是一个应用在整个MRA空间的基本概念。式（5.55）和式（5.56）的傅里叶变换为

$$\boldsymbol{\Phi}(\omega)=\left[\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_n\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\omega n}{2}}\right]\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=H(\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\omega n}{2}})\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{5.57}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\omega)=\left[\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\omega n}{2}}\right]\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=G(\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\omega n}{2}})\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{5.58}$$

通过式（5.31）和式（5.54）这两个相同的递归原理得到，式（5.57）和式（5.58）可以表示为

$$\boldsymbol{\Phi}(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty}H(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2^j}}) \tag{5.59}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\omega)=G(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\prod_{j=2}^{\infty}H(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2^j}}) \tag{5.60}$$

式（5.59）和式（5.60）分别是式（5.31）和式（5.54）的一般形式。

如图5.1所示，通过两个一般的递归方程式（5.55）和式（5.56）与式（5.41）的耦合方程可以形成Daubechies-3（db3）的尺度函数及其对应的小波。正交系数h_n和g_n列表如表5.1所示，从小波理论的参考资料可知，系数对$\{h_n,g_n\}$对于Daubechies小波群可高达db10[4]。

随着两尺度关系的发展，可得到两个连续尺度间的分解关系。为了简洁性，考虑$V_1=V_0+W_0$的情况。由于$\phi(2t)$和$\phi(2t-1)$都在V_1中，所以式（5.47）同式（5.55）和式（5.56）可表示为

$$\phi(2t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[h_{2n}\phi(t-n)+g_{2n}\psi(t-n)] \tag{5.61}$$

$$\phi(2t-1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[h_{2n-1}\phi(t-n)+g_{2n-1}\psi(t-n)] \tag{5.62}$$

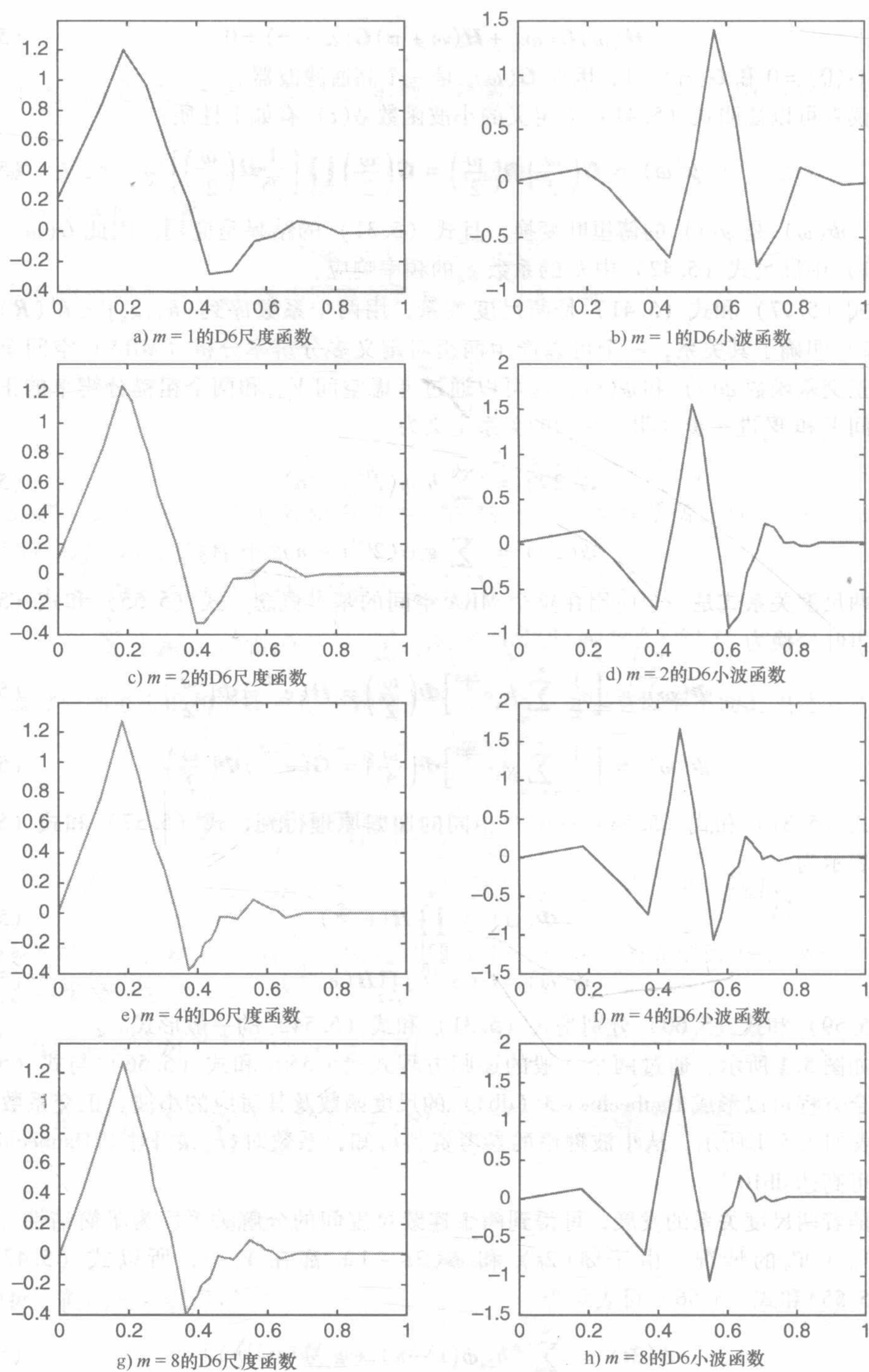


图 5.1　Daubechies-3（db3）的尺度函数（左列）和对应的小波函数（右列）在 4 个不同的两尺度特性 $m=1$、2、4 和 8 的波形（从顶部到底端）

表5.1 Daubechies-3（db3）低通和高通滤波器系数 h_n 和 g_n

$h_1=0.33267055295095688$	$g_1=h_6$
$h_2=0.80689150931333875$	$g_2=-h_5$
$h_3=0.45987750211933132$	$g_3=h_4$
$h_4=-0.13501102001039084$	$g_4=-h_3$
$h_5=-0.085441273882241486$	$g_5=h_2$
$h_6=0.035226291882100656$	$g_6=-h_1$

上式可以用以下通用式表示：

$$\phi(2^{j+1}t-k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[h_{2n-k}\phi(2^j t-n)+g_{2n-k}\psi(2^j t-n)\right] \tag{5.63}$$

式（5.63）的无穷级数是 $V_{j+1}=V_j+W_j$ 的数学描述，可使在任意尺度的尺度函数通过在一个较低尺度的尺度和小波函数来表示，一般也可称为合成方程。

5.3 离散小波变换和滤波器组

前面部分的多分辨率分析根据二进制原理提出一个尺度和小波函数综合方法的推导，式（5.44）和式（5.43）定义的小波变换 $d_{m,n}$ 对应式（4.36）中CWT的离散变换，两尺度关系和分解关系是用数字计算机实现离散小波变换中不可或缺的部分。数字化实现和两通道滤波器组有密切关系，对小波滤波器组的运行和操作有全面的理解是本书的重要目标。也就是说，目的是建立适用于控制非线性振动的基本框架。具体来说，小波分解和小波完美重构都能通过滤波器组的操作来完成，促进切割振动的同步时频域控制。在深入探讨其后章节的时域控制之前，讨论一下本章的离散小波变换和小波滤波器组。

式（5.47）可以根据特定尺度 M 使用二进制原理扩展得

$$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_M(n)2^{\frac{M}{2}}\phi(2^M t-n)+\sum_{m=M}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_m(n)2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t-n)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t)\end{aligned} \tag{5.64}$$

式中

$$f_n(t)=c_M(n)2^{\frac{M}{2}}\phi(2^M t-n)+\sum_{m=M}^{\infty}d_m(n)2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t-n) \tag{5.65}$$

式（5.65）表示在 $f(t)$ 每一转换间隔的一部分，式（5.64）更紧密的展开式为

$$f(t)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_M(n)\phi_{M,n}(t)}_{\text{粗糙的信息}}+\underbrace{\sum_{m=M}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_m(n)\psi_{m,n}(t)}_{\text{高分辨率细节}} \tag{5.66}$$

式中，M 是初始（粗糙）尺度，该式右边的第一部分提供了一个粗糙的信息。$L^2(\boldsymbol{R})$ 的剩余部分通过高尺度的小波函数形成，其次给出了函数 $f(t)$ 的详细说明。对于真实尺度和小波函数，式（5.64）~（5.66）对应的系数可以通过下式的内部形式得到

$$c_M(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_{M,n}(t)\,\mathrm{d}t = < f(t), \phi_{M,n}(t) > \tag{5.67}$$

且

$$d_m(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{m,n}(t)\,\mathrm{d}t = < f(t), \psi_{m,n}(t) > \tag{5.68}$$

式（5.67）和式（5.68）是函数$f(t)$的离散小波变换（DWT）[5]。系数$c_M(n)$和$d_m(n)$用数学上类似于傅里叶级数系数的方法完整地描述函数$f(t)$，然而两者有不同的物理解释及含义。尺度和小波函数的正交性质保证函数$f(t)$在 Parseval 等式中能量守恒，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_M(n)|^2 + \sum_{m=M}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_m(n)|^2 \tag{5.69}$$

而不同于频率部分，时间变换n和两尺度M均是在变换域中定义的能量。

通过$\phi(2t-n)$可得递归方程对应的子空间V_1：

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \sqrt{2}\phi(2t-n) \tag{5.70}$$

然后在尺度j和i的转换步骤下，对应的尺度函数为

$$\phi(2^j t - i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \sqrt{2}\phi(2^{j+1}t - 2i - n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{(k-2i)} \sqrt{2}\phi(2^{j+1}t - k) \tag{5.71}$$

对于定义在空间V_{j+1}的函数$f(t) \in L^2(\boldsymbol{R})$有（也可见式（5.46））

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j+1,n}\phi_{j+1,n}(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j+1,n} 2^{\frac{j+1}{2}} \phi(2^{j+1}t - n) \end{aligned} \tag{5.72}$$

为了表示在低尺度j下的$f(t)$，由于在粗略的表达式中没有可用的详细信息，则小波函数是必不可少的，所以有

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n} 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{j,n} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - n) \tag{5.73}$$

简单的内部形式变换可以确定两个系数：

$$c_{j,n} = < f(t), \phi_{j,n}(t) > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - n)\,\mathrm{d}t \tag{5.74}$$

和

$$d_{j,n} = < f(t), \psi_{j,n}(t) > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - n)\,\mathrm{d}t \tag{5.75}$$

把式（5.71）代入式（5.74），加以简单整理，可得

$$\begin{aligned} c_{j,n} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{(k-2n)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2 \frac{j+1}{2} \phi(2^{j+1}t - k)\,\mathrm{d}t \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{(k-2n)} (c_{j+1,k}) \end{aligned} \tag{5.76}$$

可得小波系数有个与更大尺度的尺度系数类似的关系

$$d_{j,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{(k-2n)} (c_{j+1,k}) \tag{5.77}$$

式（5.76）和式（5.77）详细说明了$c_{j,n}$和$d_{j,n}$，$f(t)$的离散小波变换可以通过一个并列运行的低通滤波器（h_n的脉冲响应）和高通滤波器（g_n的脉冲响应）同时计算，这种滤波器结构称为滤波器组[3,6]。通过滤波器组实现小波变换是不用计算小波函数$\psi(t)$的。

通过时域带有h_n和g_n的展开系数$c_{j+1,k}$的卷积运算来促进$c_{j+1,k}$滤波产生$c_{j,n}$和$d_{j,n}$。由于指数$(k-2n)$意味着式（5.76）和式（5.77）中定义的卷积可以在时间间隔k下实现，而不是整个时间区域，但会减少数据集。具体来说以每隔一个时间点来减少数据集，从而省去原始数据集一半的信息。这是通过由逆时间递归脉冲响应h_{-n}和g_{-n}对$c_{j+1,k}$卷积的物理实现，其次是通过2抽样或降采样。在图5.2所示的双通道配置的尺度系数重复并行滤波器和降采样的过程。如图所示的三个分解层次是以下多分辨率分析的体现：

$$V_{j+1}=V_{j-2}\oplus W_{j-2}\oplus W_{j-1}\oplus W_j \tag{5.78}$$

这就是从精密尺度到粗糙尺度的运算过程。

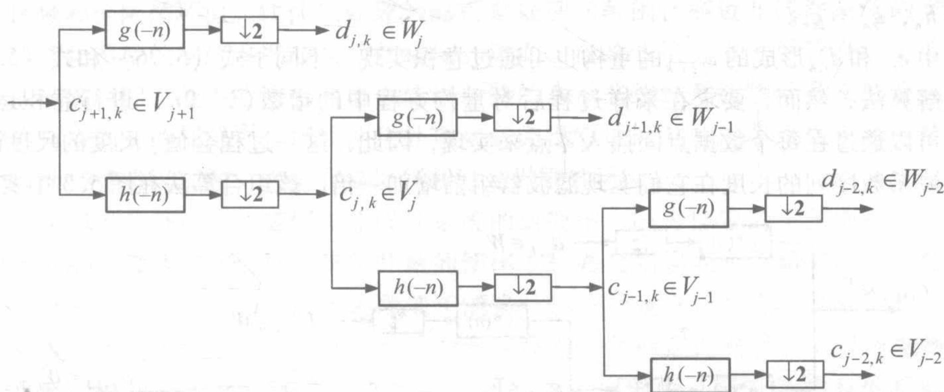


图5.2 通过双通道滤波器组的分析来表现三个分解层次的小波变换

离散小波变换也有一个对应情况，它可以将分解的数据准确无误地重组。这种情况是DWT的离散逆变换的特殊性，它满足某些可在不同尺度下从其组成部分中进行原始数据完美恢复的条件。考虑一个定义在空间V_{j+1}中的信号$f_{j+1}(t)$，多分辨率分析说明$f_{j+1}(t)$可以通过在尺度较低空间V_j的$f_j(t)$和在互补空间W_j的$g_j(t)$的近似值来表示。因此上述的数学表达式为

$$\begin{aligned} f_{j+1}(t) &= f_j(t)+g_j(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n}\phi_{j,n}(t)+\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{j,n}\psi_{j,n}(t) \end{aligned} \tag{5.79}$$

通过合并式（5.27）和式（5.41）的两尺度关系，式（5.79）可以根据两个连续尺度的脉冲响应和尺度函数表示为

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j+1,k}\phi(2^{j+1}t-k) = &\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k^*\phi(2^{j+1}t-2n-k)+ \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{j,n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k^*\phi(2^{j+1}t-2n-k) \end{aligned} \tag{5.80}$$

等式右边可以表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k^* \phi(2^{j+1}t - 2n - k) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{j,n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \phi(2^{j+1}t - 2n - k)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n} \sum_{M=-\infty}^{\infty} h^*_{(M-2n)} \phi(2^{j+1}t - M) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{j,n} \sum_{M=-\infty}^{\infty} g^*_{(M-2n)} \phi(2^{j+1}t - M)$$

$$= \sum_{M=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^*_{(M-2n)} c_{j,n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^*_{(M-2n)} d_{j,n} \right) \phi(2^{j+1}t - M) \tag{5.81}$$

由于求和指数的选择是任意的，它可以从比较两个等式总结出

$$c_{j+1,k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^*_{(k-2n)}(c_{j,n}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^*_{(k-2n)}(d_{j,n}) \tag{5.82}$$

式（5.82）是式（5.76）和式（5.77）的对应式子，表示从一个粗糙尺度的尺度函数和小波系数还原的逆变换运算。这一组不同的概念被用在产生上述的反变换中，带有星号的指数的脉冲响应被认为与重构算法有关，它们同分解滤波器有如下关系：$h_n^* = h_n$，$g_n^* = g_n$。

由 $c_{j,n}$ 和 $d_{j,n}$ 形成的 $c_{j+1,k}$ 的重构也可通过卷积实现。不同于式（5.76）和式（5.77）的分解算法，然而，要求在采样过程后对重构方程中的指数 $(k-2n)$ 进行卷积运算。采样可以通过在每个数据点间插入零点来实现，因此，这一过程会使 j 尺度的尺度函数和小波系数序列的长度在它们实现滤波器组前增加一倍。该组合算法在图 5.3 中实现。

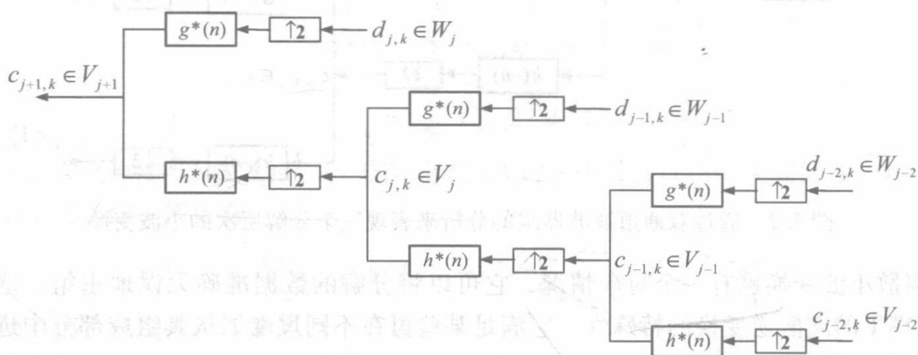


图 5.3　通过双通道滤波器组的合成来表现三个分解层次的逆小波变换

参考文献

[1] Chui, C.K., 1992, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, San Diego, CA.

[2] Rioul, O., Vetterli, M., 1991, "Wavelet and Signal Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, 8(1) 14–38.

[3] Strang, G., Nguyen, T., 1996, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA.

[4] Daubechies, I., 1992, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, PA.

[5] Goswami, J. C., Chan, A. K., 2011, *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, John Wiley and Sons, New York.

[6] Mallat, S.G., 2008, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 3rd edn, Academic Press, Burlington, MA.

第 6 章　动态不稳定性的暂态特性和频谱特性

前面提到车削加工是一个非线性复杂的暂态过程，不像第 4 章研究的动态系统，其响应是稳定且时不变的，现实中的切削加工过程通常是不稳定的时变谱函数。为了能控制切削的稳定性，理解该过程的基本特性，并确定其基本参数是非常重要的。本章探讨了用一个普遍的非线性系统来确定其在非稳定响应下的基本性能，此结论一般应用在后面章节所讨论的所有动态系统中。

研究非线性系统的一个基本目标是保证周期解的存在，以便于随后可确定其稳定性[1]。稳态解通过微小但有限的幅值振荡器平衡点附近的点来估算激励幅值的阈值、稳定区域和极限循环值。线性化处理的前提是处理的范围在靠近非线性系统的平衡点处，线性化模型的响应逼近非线性的精度。然而，在某些情况下，尽管有一个非线性响应的准确时间，既不能用总的也不能用单独的表示非线性系统物理意义的扰动方法来解决自身固有的部分[2]。用线性化处理来研究没有适当判断的非线性系统会使基本的非线性特性难以理解，将会有错误判断稳定界限的风险。

基于傅里叶分析广泛应用在非线性系统的研究中，因为稳定的正弦曲线可以表示自身固有的非线性时变信号，傅里叶域的使用方法将会错误表示所研究的非线性系统的基础物理性[3]。正如很多用在处理基于傅里叶的非稳定性信号方法，它们也会有与傅里叶变换有关的缺点[4]。非线性响应的实际情况，包括混沌路径，是具有幅频调制耦合的瞬时非稳定性的，如果非线性响应可以被充分说明，则自身固有的振幅调制（AM）和频率调制（FM）需要解耦[4]。第 4 章中介绍的瞬时频率（IF）用来解决频率在时间上的依赖性。越来越多的关注重点是 Hilbert- Huang 变换（HHT），它可以用来研究二阶、三阶的非线性[5]、杜芬振荡器[6]、幅值和相位缓慢变化的动态系统[7]以及故障引起的非线性旋转[8]。因为 HHT 不能预先决定基函数和对其分量进行提取的正交性，它为系统特性和非线性的精确估算提取瞬时幅值和频率的分量[9]。结果表明，HHT 在非稳定暂态响应的特性下比正弦谐波更好，非线性说明 IF 是严格直观、实际有效的。

各种不同种类的杜芬振荡器广泛应用在实际中，在参考文献［10］中，简谐激励的阻尼杜芬振子响应通过 Floquet 分析预知对称破缺和双周期分叉的二阶扰动值。非稳定激励下的杜芬振子应用在频率和幅值的线性循环变换和非稳定性分叉的研究中，结果表明非稳定过程不同于具有不同特征的稳定过程[11,12]。但是，这些在非线性系统下的扰动研究产生非实际的结果是错误的。接下来回顾用 IF 由时频域建立软弹簧的非线性非稳定性分叉。需要指出的是，尽管 IF 对研究非线性动态响应有效，但是一些结果会用于分叉的产生和改进，从而使混沌响应最大化，这是一个非稳定的、暂态的过程。通过快速傅里叶变换（FFT）、短时傅里叶变换（STFT）、Gabor 变换和瞬时频率（IF）

来研究杜芬振子与其线性化。本章的第二部分深入研究用在非稳定激励下传统的动态分析工具和 IF 通过杜芬振子产生通往混沌的道路。

6.1 时频域中线性化的含义

为了研究线性化的影响力，通过 FFT、时频分析工具和 IF 研究非线性杜芬振子的响应及其在稳定激励下的线性情况。类似于复杂的非线性系统，包括船舶横摇运动，杜芬振子有个简明的优点，可以进行详细研究。特定的杜芬振子响应受简谐激励的黏滞阻尼影响，表现为滞回和混沌的性能[9]。无量纲的杜芬振子的一般形式为

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+\beta x+\alpha x^3=a\cos(\omega t) \tag{6.1}$$

式中，μ、β、α、a 都是常数。

当移动较小时，与平衡零点有关的三阶项可以被线性化，可以被忽略，即

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+\beta x=a\cos(\omega t) \tag{6.2}$$

如果 $\beta-\mu^2>0$，一般解可以简化为

$$x(t)=\underbrace{Ae^{-\mu t}\cos(\sqrt{\beta-\mu^2}t+\theta)}_{\text{暂态}}+\underbrace{\frac{a}{\sqrt{(\omega^2-\beta)^2+4\mu^2\omega^2}}\cos(\omega t-\theta)}_{\text{稳态}} \tag{6.3}$$

当 $\mu<1$ 时，欠阻尼系统和阻尼固有频率是 $\sqrt{\beta-\mu^2}$，稳态响应的频率 ω 与激励频率相同。参考文献［10］提出单阱势杜芬振子，其中 $\alpha=-1$，$\beta=1$，$\mu=0.2$，稳定激励响应使 a 保持在 0.32 处，激励频率为 0.78rad/s。图 6.1 所示为线性化和非线性化杜芬振子的 FFT，乍看很难区分，大部分人认为都只有一个 0.12Hz 的频率。

用短时傅里叶变换（STFT）和 Gabor 小波变换这两个时频分析法研究非线性和线性响应。图 6.2 表明主频率和非线性影响都不能通过 STFT 精确地决定。为了提高频率分辨率，必须增加时间的宽度，则必然会导致时间分辨率减少，这是所有基于傅里叶变换的时频分布本身具有的难题（困境）。图 6.3 说明 Gabor 小波变换[13]具有一个更好的时频分辨率，然而其仍然不能区分被线性化中的非线性响应。由于这两个频谱的唯一区别是靠近主频的微小不规则频率，但因为噪声被过滤了，在中心处将采取线性化处理。但是非线性系统可线性化只是一个粗略的假设，在被控制之后，没有更多调查研究表明系统会存在突然崩溃的潜在威胁。线性化处理的方法一般用来作为处理没有附加说明的非线性问题的前提，实际上扭曲了其本身固有的基本物理特性。系统的特点可能是错误的，因此结果会有不稳定的风险。

如果在同步时频域内提出一种替代方法，图 6.4a 所示为线性化处理的杜芬振子随时间变化图（最上面那张图）、其提取的 IMF C1（中间图）和残余值 $R(t)$（最下面那张图）。IMF C1 方法包括高频部分，与谐波振荡的初始时间响应有类似的特性。线性化杜芬振子的响应只有一个频率，因此只能产生一个 IMF。根据参考文献［3］中的研究可得，IF 是 IMF 模型中周期的倒数，因此 C1 模型中的稳态 IF 表示频率在 0.124Hz

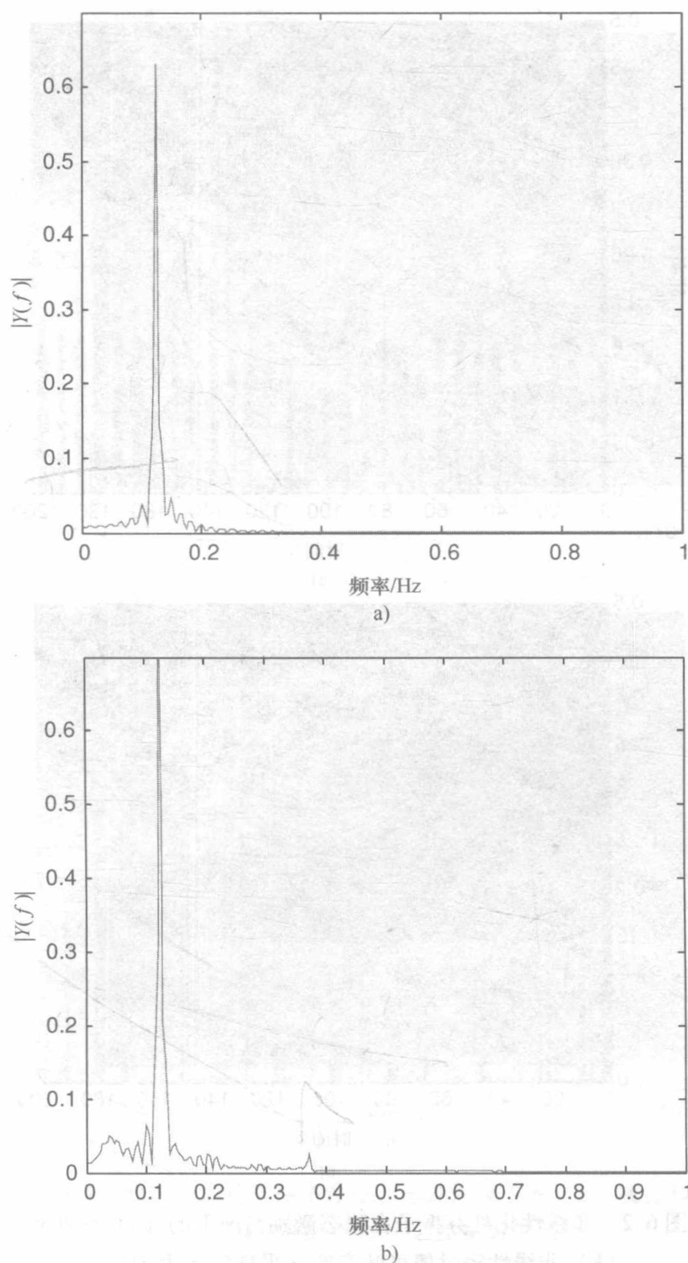


图 6.1　非线性化杜芬振子（a）线性化和（b）非线性化的快速傅里叶变换

处的常数，如图 6.4b 所示，与式（6.3）中描述的线性化模型在 $\omega=0.78/2\pi\text{Hz}$ 处的频率一致。

下面的分析保持了杜芬振子的三阶非线性。图 6.5 所示为式（6.1）中的非线性杜芬振子的 IMF 和 IF，尽管图 6.5a 中的 IMF C1 波形很像谐波，图 6.5b 中的 IF 表明其并不是，但是说明同步时间暂态性能在 0.11 ~ 0.14Hz 中均值为 0.124Hz 的振荡周期性，

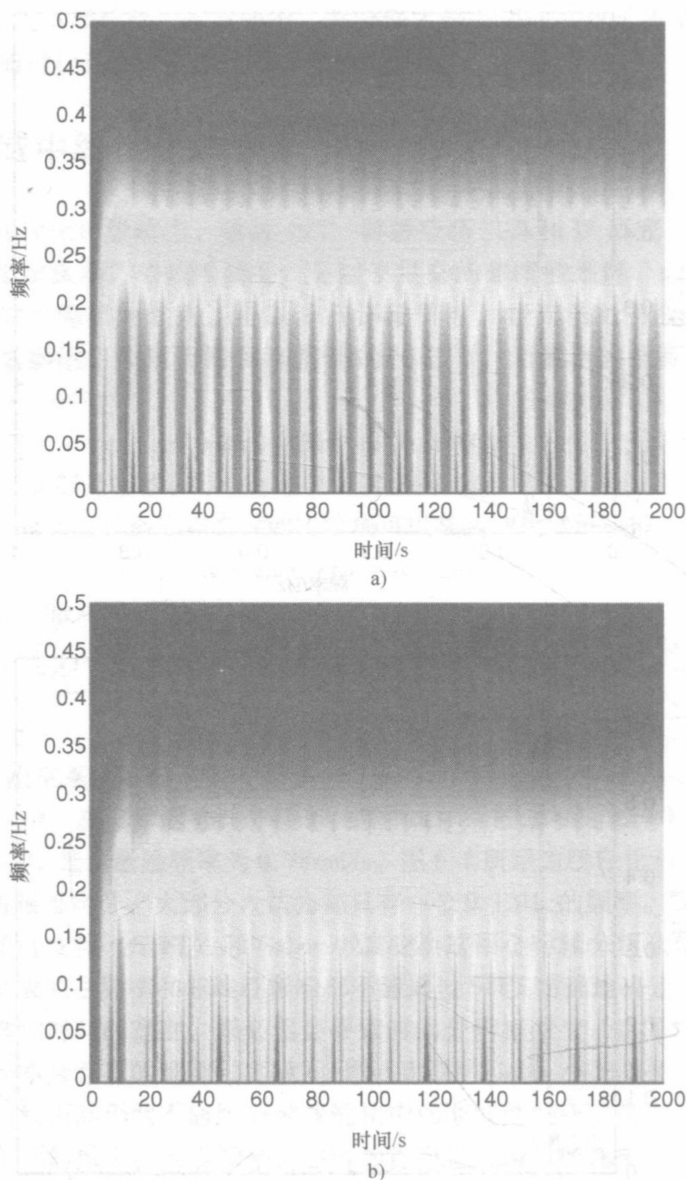


图 6.2　非线性化杜芬振子在稳态激励情况下的（a）线性和（b）非线性短时傅里叶变换（采样频率为 2Hz）

其为线性系统的频率。IF 说明非线性响应不稳定但在一定范围内变化，通过边际谱进一步说明在概率中的频率分布。图 6.6a 中的边际谱表示与线性化杜芬振子有关的单频，但是对于图 6.6b 中的非线性情况，在 0.11 ~ 0.14Hz 之间有一个倍频。由于在选定时间范围内，边际谱是频率组成部分的发生概率，所以在响应中有个倍频组分部分。

由上述可以得到两个观察结果，第一，傅里叶频谱不能说明非线性响应的真实特

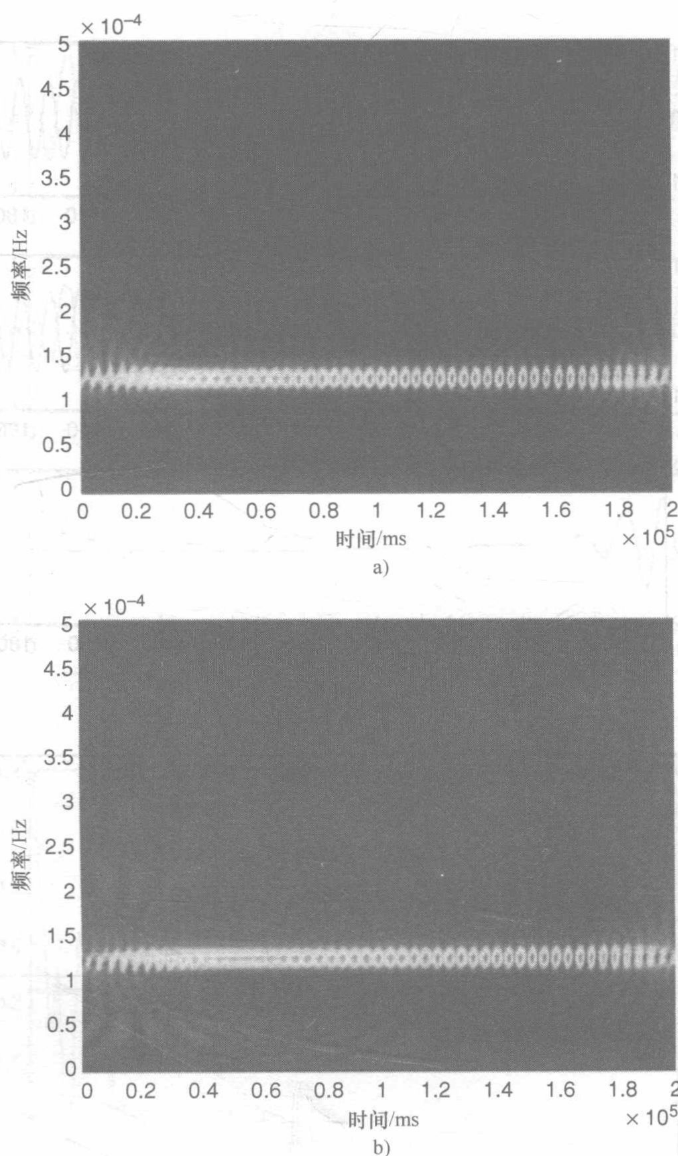


图 6.3　非线性化杜芬振子在稳态激励情况下的（a）线性和（b）非线性 Gabor 变换（采样频率为 2Hz）

性；第二，通过比较非线性响应和线性响应的边际谱可知，线性化处理错误解释了非线性化处理的特征，用一个单一频率的倍频来替换。频谱特性的错误解释表明一般通过线性化处理设计的基于频域的控制器会误判频率的响应，因此不能实现分叉的不断变化。由于通往混沌的道路是一个从周期变为非周期宽频带的暂态过程，线性化处理和基于傅里叶变换的控制器设计不能识别分叉和混沌的始端，以及系统的稳定范围。

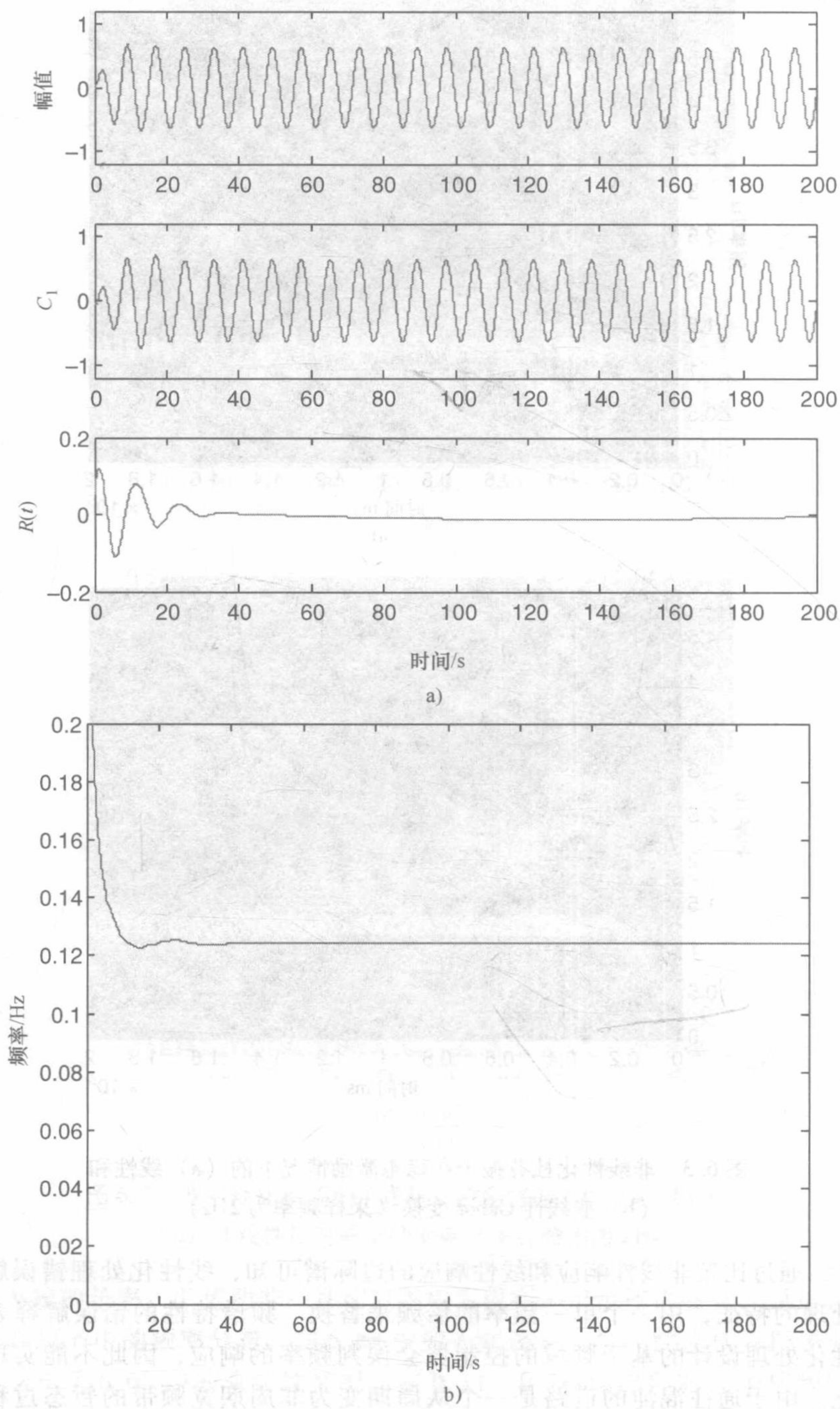
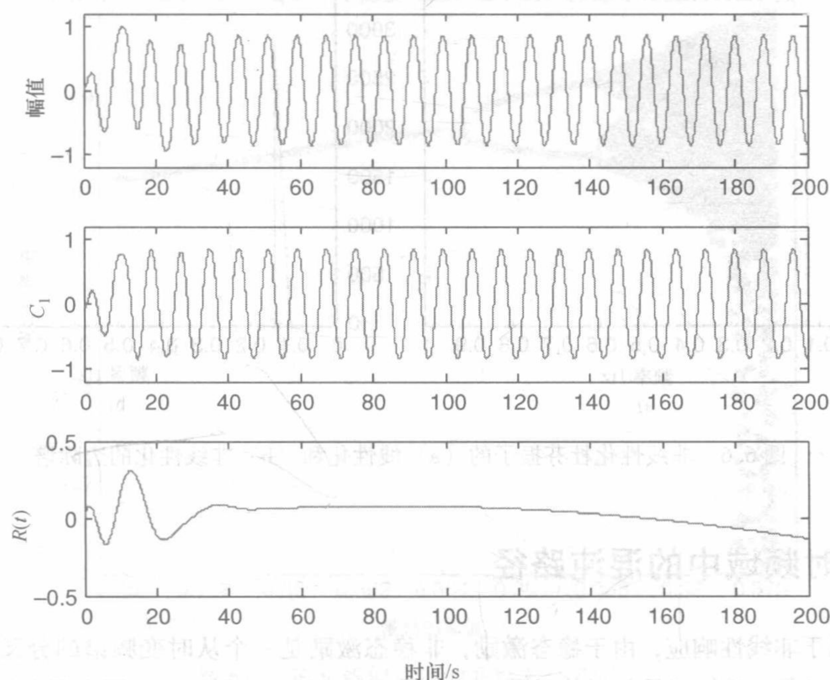
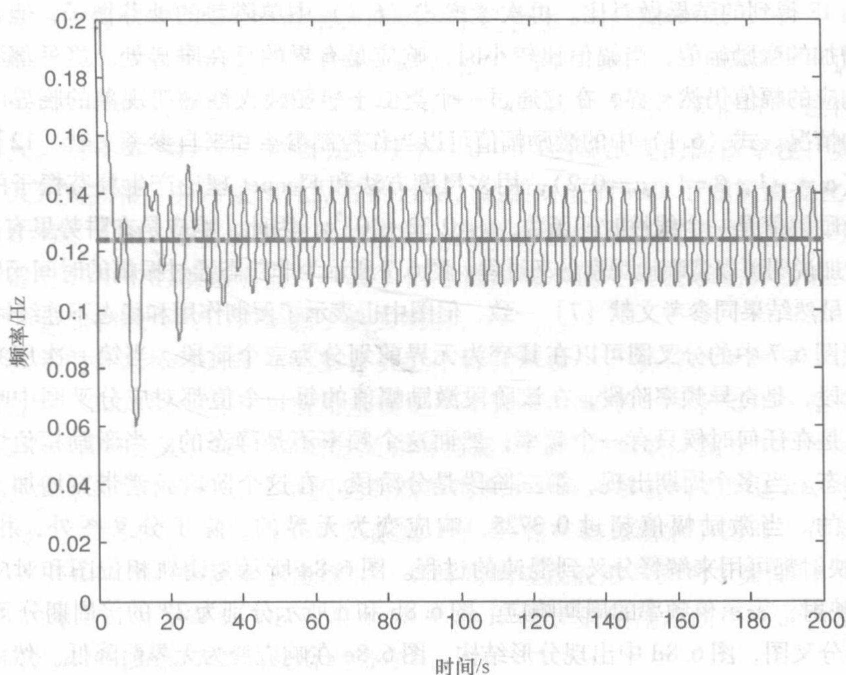


图 6.4　线性化杜芬振子的（a）时间响应及其 IMF 和（b）IF



a)



b)

图 6.5 非线性化杜芬振子的（a）时间响应及其 IMF 和（b）IF

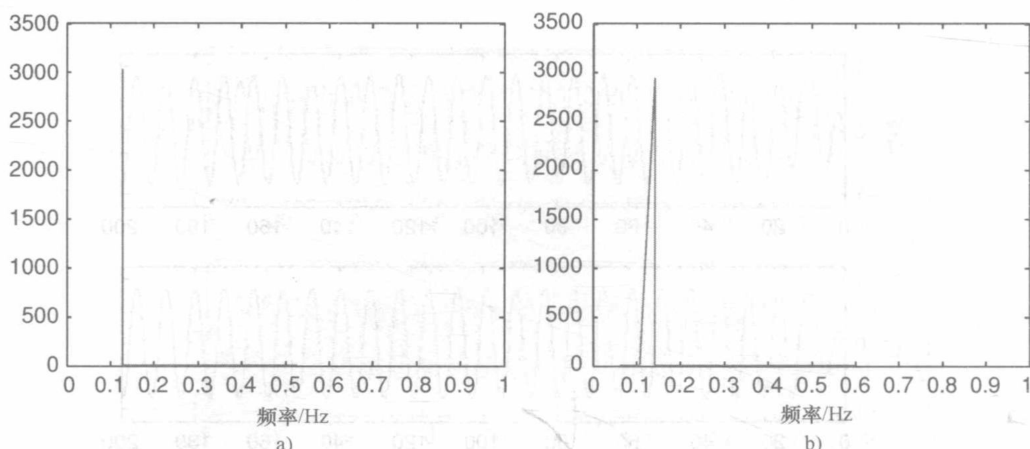


图 6.6　非线性化杜芬振子的（a）线性化和（b）非线性化的边际谱

6.2　时频域中的混沌路径

不同于非线性响应，由于稳态激励，非稳态激励是一个从时变频谱的分叉到混沌的时间变换过程。传统工具包括分叉图、相位图和 Poincaré 映射，一般用来研究通往混沌的道路与由 IF 得到的结果做对比。再次考虑式（6.1）中单阱势的杜芬振子，但是有一个随时间增加的激励幅值，当幅值比较小时，响应是有界的且在阱势处。当外部激励逐渐增加，响应的幅值仍然有界，在它通过一个类似于船舶毁灭性翻船现象的临界限后会变为无界的情况。式（6.1）中的激励幅值可以当作控制参数和来自参考文献［12］中的其他系数（$\alpha=-1$，$\beta=1$，$\mu=0.2$），用多尺度方法和 Floquet 理论产生杜芬振子的稳定分叉图。激励幅值是一个线性时间函数，$a=0.32+10^{-7}t$，因此，响应是在阱势里有界，振幅的缓慢增加说明可以清晰地观察分叉过程。图 6.7 所示为非稳态通过振幅的时间函数分叉的结构图，虽然结果同参考文献［7］一致，但图中也表示了侵彻作用和稳态不连续性的消除。

一般图 6.7 中的分叉图可以在其变为无界前划分为三个阶段。当第一次用激励时出现第一阶段，是奇异频率阶段，在该阶段激励幅值的每一个值都对应分叉图中唯一一个点，意思是在任何时候只有一个频率，然而这个频率不是静态的。当激励幅值增加，为倍周期状态。当多个周期出现，第三阶段是分阶段，在这个阶段频谱带宽增加，但是仍然是有界的。当激励幅值超过 0.3725，响应变为无界的。除了分叉图外，相位图和 Poincaré 映射都可用来解释分叉到混沌的过程。图 6.8a 所示为闭轨相位图和对应的单点 Poincaré 映射，表示单频率的周期响应。图 6.8b 和 c 所示分别为 $2T$ 的倍周期分叉图和 $4T$ 的倍周期分叉图，图 6.8d 中出现分形结构，图 6.8e 在响应变为无界前降低。然而，由于轨迹的重叠很难确定运动状态，因此强调了相位图和 Poincaré 映射不能获取混沌路径暂态现象的过程，除了从分叉到混沌状态的质变，分叉图不能提供任何进一步的信息。

图 6.8 中的响应通过 FFT 和边际谱进一步估算。图 6.9a 中的周期运动的 FFT 说明

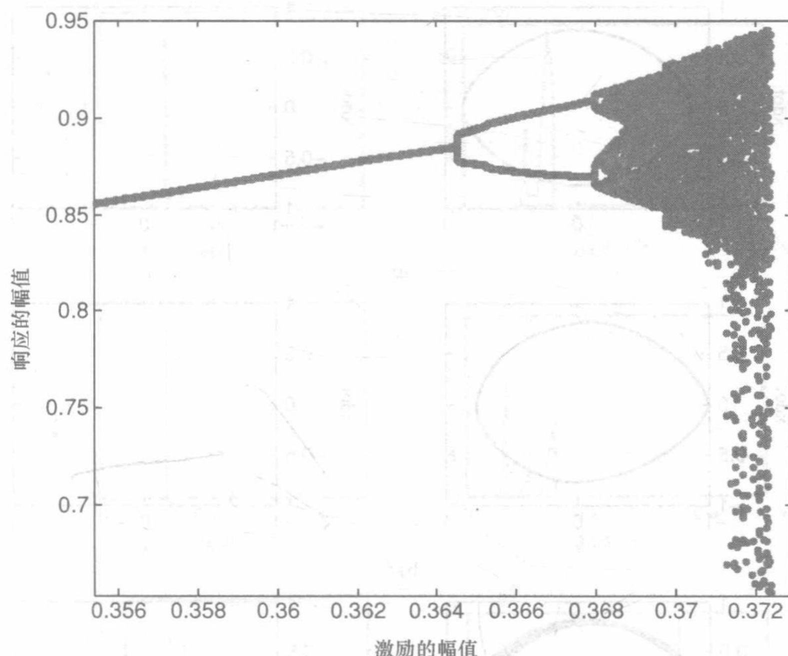


图 6.7　激励幅值增加的非稳态分叉图

频率分量在 0.142Hz 处，然而边际谱说明频率不是稳态，但是振荡在 0.11 ~0.14Hz 之间，是非线性响应的主要特性。由于激励幅值增加，图 6.9b 中第二类频率在边际谱中出现，但是 FFT 仍然为单频率。图 6.9c 所示是在 $4T$ 的倍周期分叉情况下进行同样的观察，而且，图 6.9d 和 e 的边际谱说明频率在 0 ~0.05Hz 出现的高概率性，其表示响应频率扩大到宽频带，并产生混沌路径的过程，然而对应的 FFT 不能解决变化的过程。另外，图 6.9b、d 和 e 中有明显虚假的高频，这些虚假的高频信号分支来自于用高次谐波成分适应 FFT 中的动态响应——真实信号谐波频率的平均法和估算法的结果，结果说明 FFT 是非物理性的，并误判了真实响应。

瞬时频率用来选择时间段分别来分析三个特征阶段，分别是奇异频率、倍周期分叉和分形过程。200s 的固定时间窗用来确定一个较好分辨率，用下面几张图来说明周期运动、$2T$ 倍周期分叉、$4T$ 倍周期分叉和混沌路径的时间级联。图 6.10 所示为 IF 和它对应奇异频率阶段的 IMF，之前提到的相位图和 Poincaré 映射的周期运动，实际上有振动频率的非线性说明。比较在非稳态激励下的 IF 和在稳态激励下的 IF，尽管非线性激励幅值只以每秒 10^{-7} 的速率缓慢增加（其时间响应及波形与图 6.5 类似），但是它们的 IF 是不一样的。对比图 6.10b 和图 6.5b 中的 IF 值，显然用之前所有的方法并不能说明 IF 可以分析系统甚至使系统有轻微变化。

由于激励幅值的进一步增加，响应会变为 $2T$ 的倍周期分叉。第一个 IMF 模型 C1 类似于时间响应，对应的 IF 与奇异频率阶段的 IF 相同。随着幅值增加而产生 C2 模型，图 6.11 所示的 IF 说明第二振荡频率大约为 0.06Hz，是第一个模型频率的一半，因此

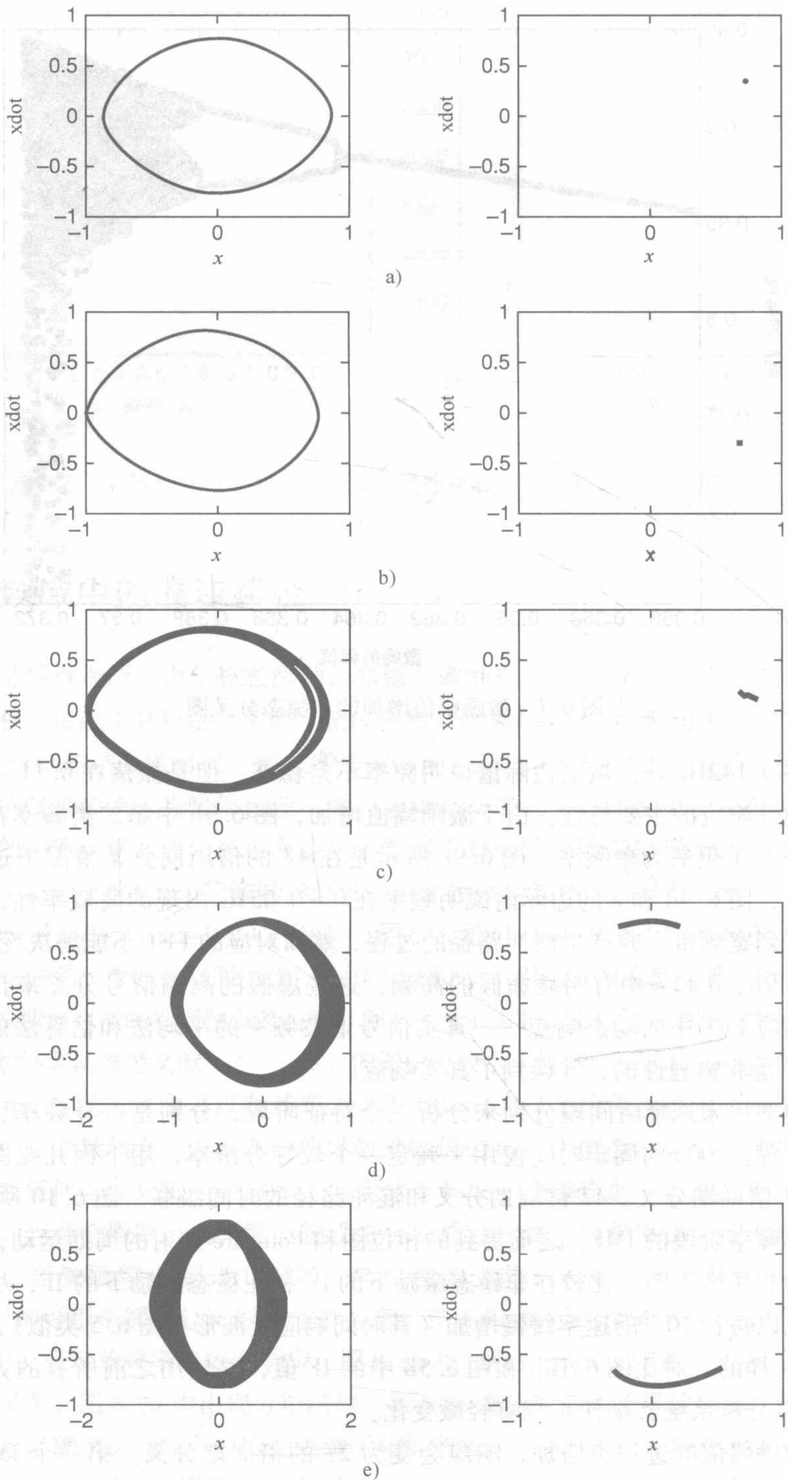


图 6.8 （a）周期运动、（b）2T 的倍周期分叉、（c）4T 的倍周期分叉、（d）分形、（e）在变为无界前分形的相位图（左）和 Poincaré 映射（右）

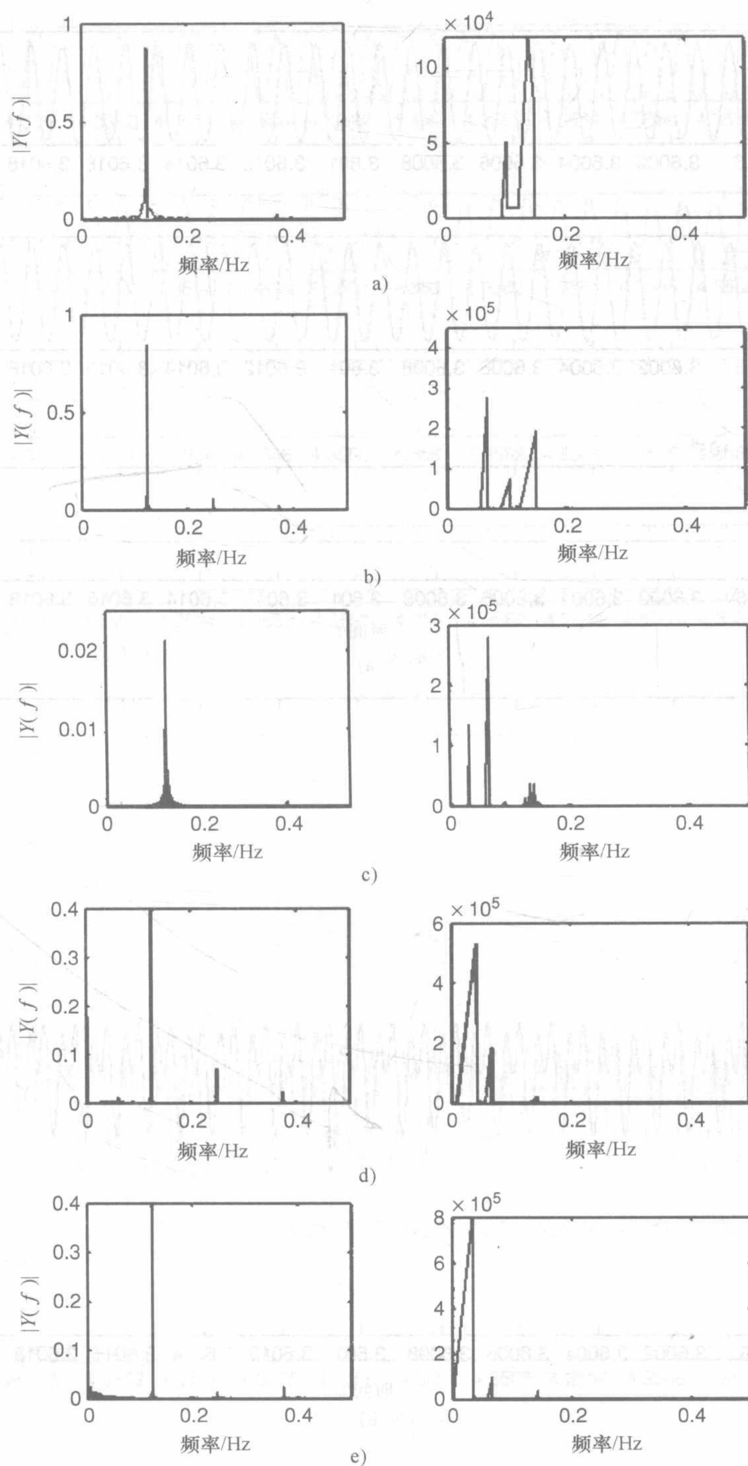


图 6.9 (a) 周期运动、(b) 2T 的倍周期分叉、(c) 4T 的倍周期分叉、(d) 分形、(e) 在变为无界前分形的 FFT (左) 和边际谱 (右)

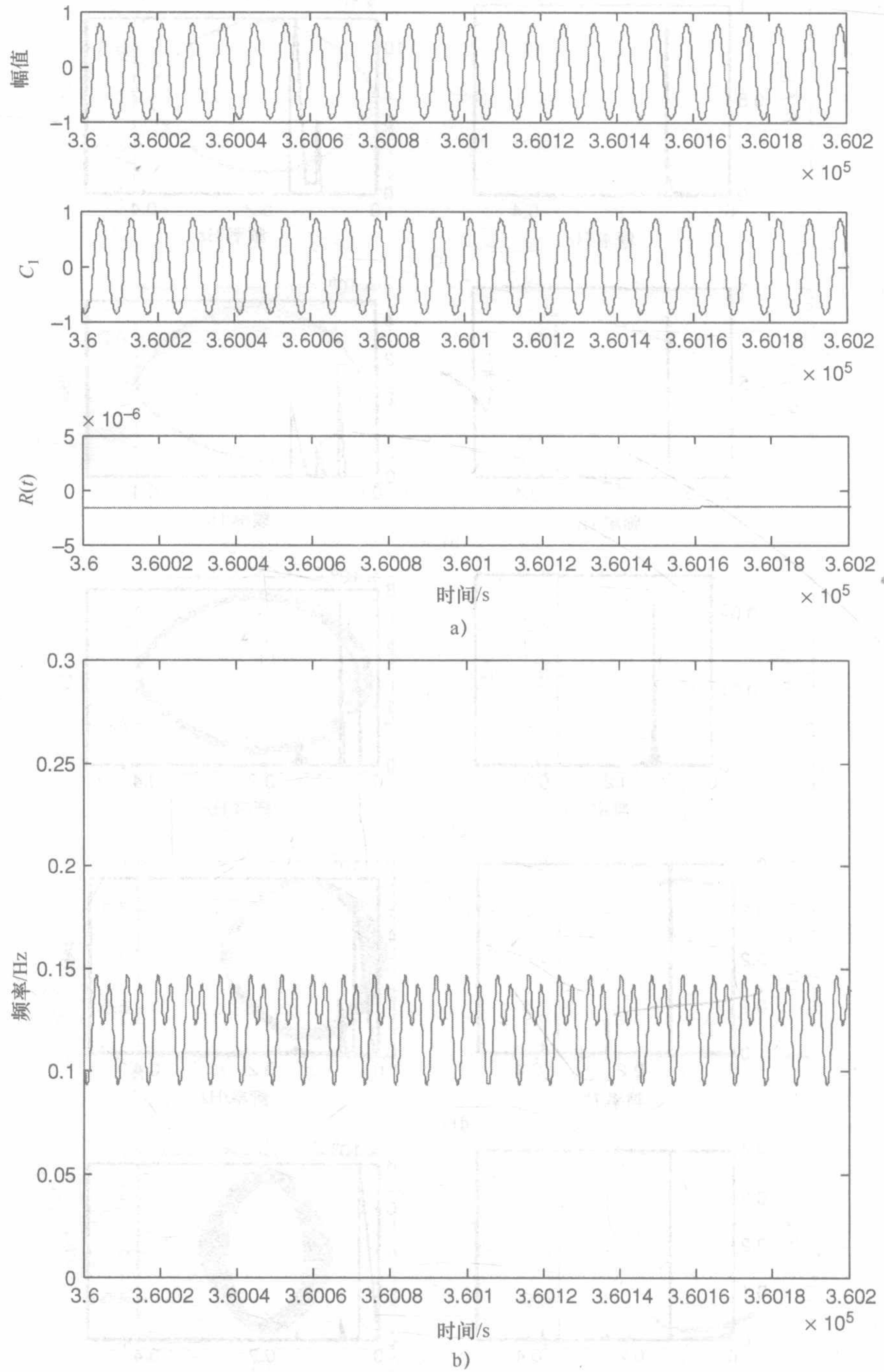
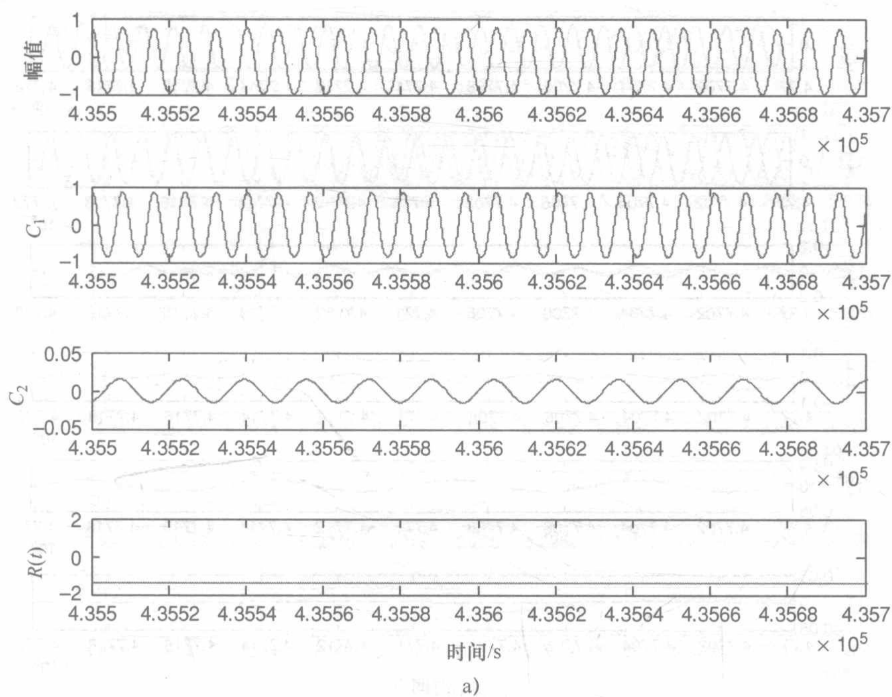
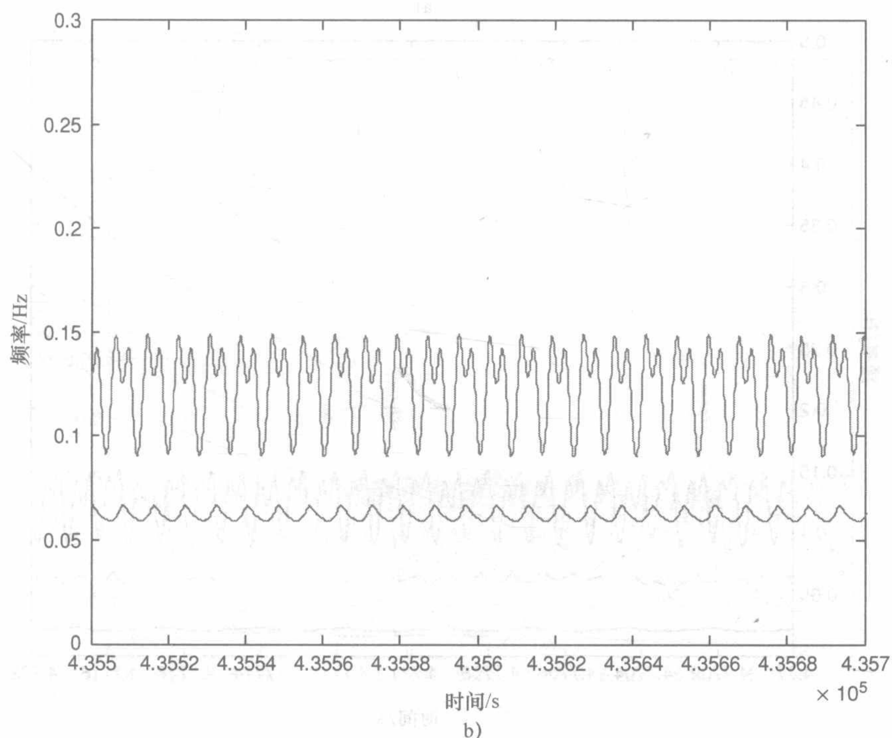


图 6.10 奇异频率阶段的（a）时间响应及其 IMF、（b）瞬时频率（每个时间点的单一频率）



a)



b)

图 6. 11 2T 的倍周期分叉的（a）时间响应及其 IMF、（b）瞬时频率

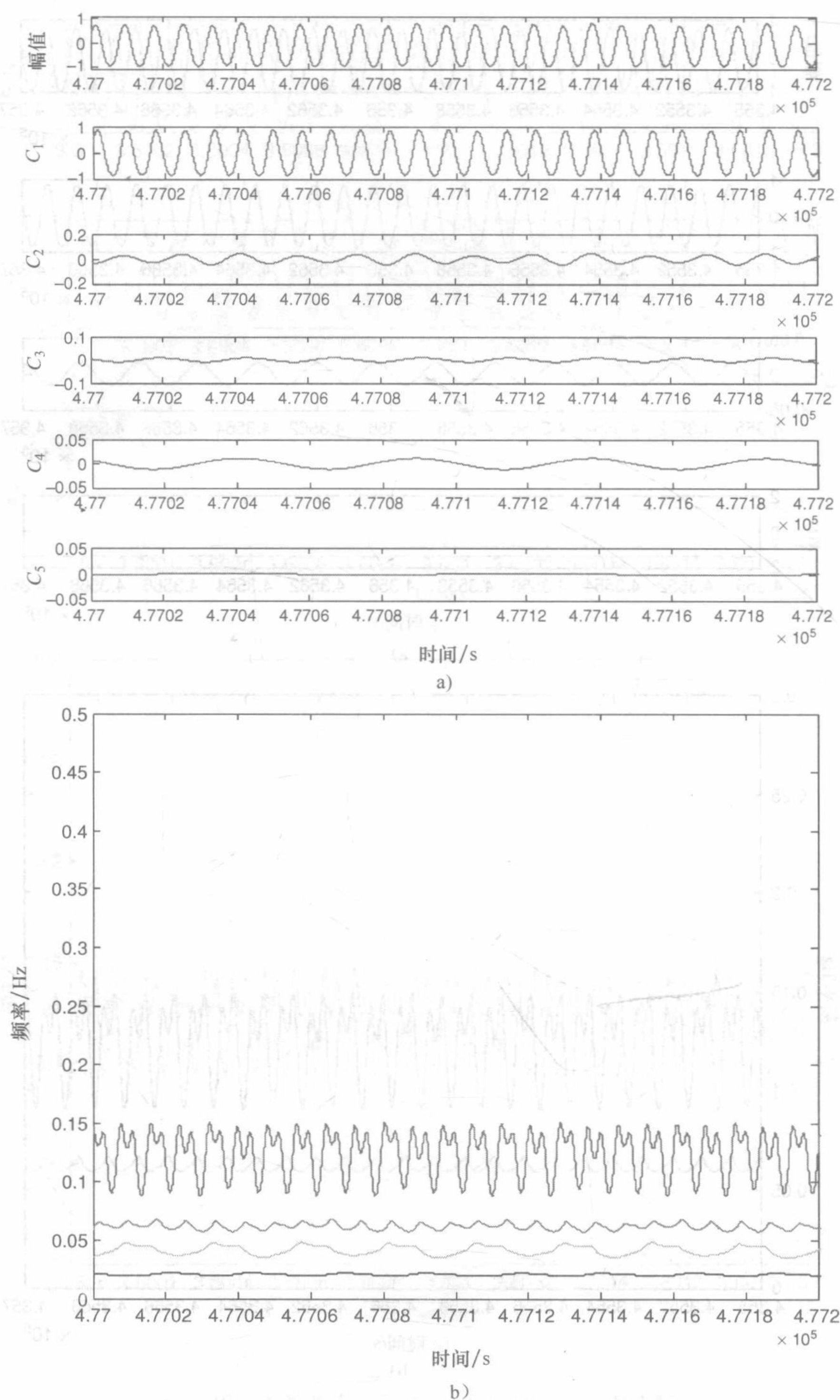
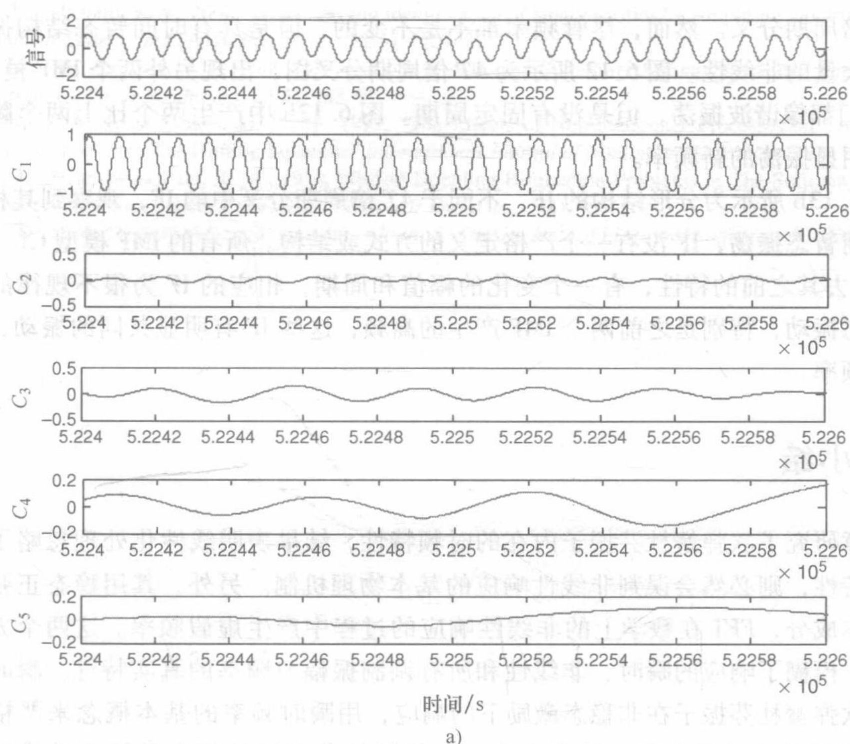
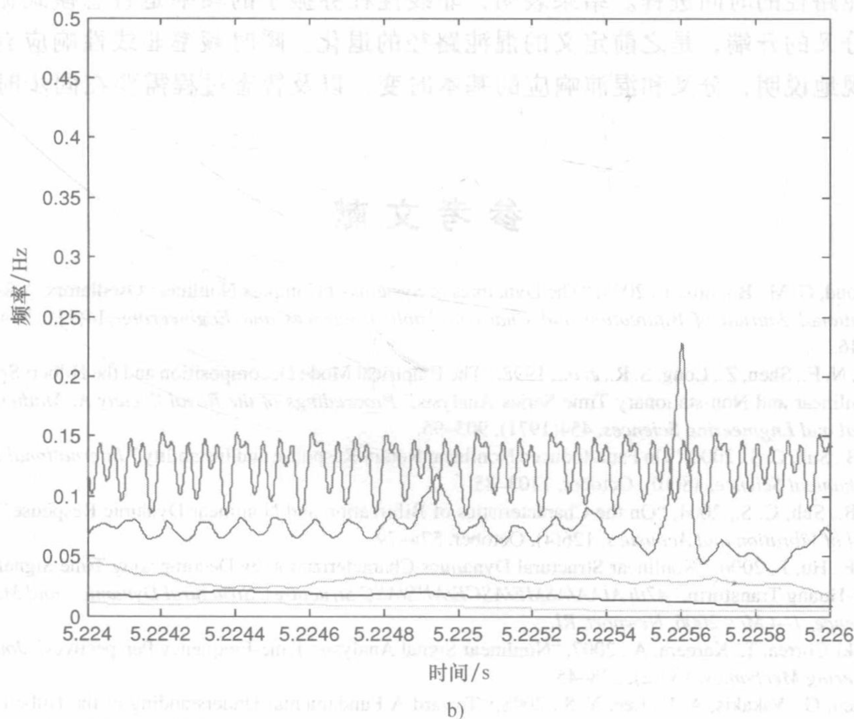


图 6.12　4T 的倍周期分叉的（a）时间响应及其 IMF、（b）瞬时频率



a)



b)

图 6.13　分形结构的（a）时间响应及其 IMF、（b）瞬时频率

是一个倍周期分叉。然而，尽管频率都不是不变的，但是具有时间暂态结构振动的周期性和大量的非线性。图 6.12 所示为 $4T$ 倍周期分叉图，出现另外两个 IMF 模型 C3 和 C4，它们都像谐波振荡，但是没有固定周期。图 6.12b 中产生两个比上两个瞬时频率有较不明显振荡的新频率。

图 6.13b 所示为分形结构的 IF，不同于 $4T$ 倍周期分叉中的 IF，观察到其相对有规律的时间暂态振荡，IF 没有一个严格定义的方式或结构。所有的 IMF 模型 C1、C2、C3 和 C4 失去其之前的特性，有一个变化的幅值和周期，相应的 IF 为很不规律的大幅值时间暂态振动，特别是之前两个 IMF 产生的高频，这些 IF 有明显共同的振动，产生更多广谱频率。

6.3 小结

本章研究了软弹簧杜芬振子内在的时频特性，结果表明线性化处理忽略了内在的非线性特性，则必然会误判非线性响应的基本物理机制。另外，其用稳态正弦函数作为其基本成分，FFT 在数学上的非线性响应的过程中产生虚假频率。这两个方法都被误解了，模糊了响应的瞬时、非线性和所有调制振幅与频率的真实特性。瞬时频率用来研究软弹簧杜芬振子在非稳态激励下的响应，用瞬时频率的基本概念来严格直观地解释混沌路径的时间进程。结果表明，非线性杜芬振子的频率是暂态模式振动，是倍周期分叉的开端，是之前定义的混沌路径的退化。瞬时频率非线性响应有力、有效、直观地说明，分叉和混沌响应的基本时变，以及暂态过程需要在同步时频域内建立。

参考文献

[1] Mahmoud, G. M., Bountis, T., 2004, "The Dynamics of Systems of Complex Nonlinear Oscillators: A Review," *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 14(11), November, 3821–46.

[2] Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., *et al.*, 1998, "The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Non-stationary Time Series Analysis," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1971), 903–95.

[3] Yang, B., Suh, C. S., 2006, "On Fault Induced Nonlinear Rotary Response and Instability," *International Journal of Mechanical Science*, 48(10), October, 1103–25.

[4] Yang, B., Suh, C. S., 2004, "On the Characteristics of Bifurcation and Nonlinear Dynamic Response," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 126(4), October, 574–79.

[5] Pai, P. F., Hu, J., 2006, "Nonlinear Structural Dynamics Characterization by Decomposing Time Signals using Hilbert-Huang Transform," *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 1–4 May 2006, Newport, RI.*

[6] Kijewski-Correa, T., Kareem, A., 2007, "Nonlinear Signal Analysis: Time-Frequency Perspectives," *Journal of Engineering Mechanics*, 133(2), 238–45.

[7] Kerschen, G., Vakakis, A. F., Lee, Y. S., 2008, "Toward A Fundamental Understanding of the Hilbert-Huang Transform in Nonlinear Structural Dynamics," *Journal of Vibration and Control*, 14(1–2), 77–105.

[8] Douka, E., Hadjileoniadis, L.J., 2005, "Time-Frequency Analysis of the Free Vibration Response of A Beam with A Breathing Crack," *NDT&E International*, 38(1), 3–10.

[9] Pai, P. F., Palazotto, A. N., 2008, "Detection and Identification of Nonlinearities by Amplitude and Frequency," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(5), 1107–32.

[10] Nayfeh, A. H., Sanchez, N. E., 1989, "Bifurcations in A Forced Softening Duffing Oscillator," *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 24(6), 483–97.

[11] Moslehy, F. A., Evan-Iwanowski, R. M., 1991, "The Effects of Non-Stationary Processes on Chaotic and Regular Responses of The Duffing Equation," *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 26(1), 61–71.

[12] Lu, C. H., Evan-Iwanowski, R. M., 1994, "Period Doubling Bifurcation Problems in The Softening Duffing Oscillator with Nonstationary Excitation," *Nonlinear Dynamics*, 5(4), 401–20.

[13] Gabor, D., 1946. "Theory of Communications," *Journal of the Institute of Electrical Engineers*, 93(26), 429–57.

第 7 章　动态不稳定性的同步时频域控制

尽管很多混沌控制理论的重点是控制“静态混沌”，但混沌路径的切削稳定性退化实际上是一个短暂的、非稳态的“动态”过程。所以，混沌响应在时域里是有界的，但是在频域里会变成非稳定的带宽。本章回顾了在时域和频域中涉及的一些控制理论，它们均不能描述混沌路径的过程。系统的先验知识可用于正常工作情况下的控制理论，当系统状态发生剧烈变化时，它们均可表明故障。由本章前半部分可知，这对一个具有自适应能力的控制器和能够对系统进行识别以及实时地进行合理控制来讲是非常必要的。OGY 方法和基于李雅普诺夫控制器这两个控制理论可分别应用于稳定或不稳定的 Hénon 映射和 Duffing 方程，它们在控制自治稳定系统时是有效的，但当系统是非自治非稳定时，稳定系统失效。基于现有和之前章节的基础知识，提出一个新的混沌控制方法，它具有传统混沌系统的基本特性。多分辨率分析可以通过滤波器组将一个信号分解为高频部分和低频部分。控制器在小波域中建立，可以在时域和频域中同步操作。在线识别和前馈控制可以通过第 3 章中提到的 FXLMS 算法的改进版实现，本章所研究的控制方法可以减轻在时域和频域中的动态损坏，且可以合理地调节所需参考信号的响应。

7.1　混沌路径的性质

混沌控制研究几十年来都备受关注，主要分为开环控制和闭环控制。开环控制是通过应用一个合理的选择输入函数或外部激励来改变非线性系统的性能，简单且不需要传感器。然而，开环控制一般由于其操作不是以目标为导向而被限制[1]。反之，闭环控制回馈一个基于系统状态选择的摄动来控制一个规定的动态。近年来，提出过很多闭环的混沌控制理论，常见的有 OGY 控制、延迟反馈控制、基于李雅普诺夫控制以及自适应控制理论。OGY 控制[2]用离散的小参数摄动来稳定混沌轨道并使混沌轨道来跟踪吸引子中的不稳定周期轨道（unstable periodic orbit，UPO）。它可以在固定点上用系统的雅可比矩阵的特征值来建立稳定性，但是对于有复特征值或多个不稳定特征值的高维混沌系统，通过 OGY 方法难以控制这样的系统[3]。高阶动态系统的混沌控制方法进行了多次改进[3-6]。另外一个缺点是控制参数的可调范围由于系统状态变量和 UPO 的间隔而受到限制。因为 OGY 控制的起始要求是状态变量方法接近目标 UPO，等待时间可以通过重组相平面来缩短[7]，但是，难以获得一个精确的 UPO 解析式。因为这些轨道的不稳定性质，也很难实现 UPO[8]。由于参数的校正是离散、少见且微小的，噪声的存在会导致系统偶尔远离预期的周期轨道[9]。这些难点使 OGY 方法只有少数的应用，如机械臂的控制[10]、受迫摆[11,12]以及电力系统[13]。

另外一个广泛应用的混沌控制理论是延迟反馈控制（DFC）[9]，混沌系统 UPO 的稳定性可以通过带有专门设计的外部振子的组合反馈来实现，或者通过延迟反馈控制来实现，这个反馈是一个不易受噪声影响的小型连续扰动。不同于 OGY 控制，它不需要动态系统的先验分析知识，除了 UPO 的周期，还可以应用在高维系统中。近年来的研究包括稳定性分析[14]和在任意大周期下的 UPO 的稳定性[15]。参考文献［16］对延迟反馈控制方法进行了综述。延迟反馈控制的缺点是很难进行延迟反馈系统的线性稳定系统分析[16]以及对延迟选择非常灵敏[17]。如果控制目标是为了使强迫 T 周期法稳定，则延迟将会强制设置为 T。或者，用一种启发式方法来估计延迟时间，但是也很难找到最小周期。

李雅普诺夫直接法确定一个系统稳定性不需要结合明确的动态方程，它取决于这个物理性质：总能量不断消耗的系统必须最终在平衡点处结束[18]。假设从系统中得到一个连续可微的正定函数（李雅普诺夫函数）$V(x)$。如果 $V(x)$ 的导数是半负定的，则系统是稳定的。如果 $V(x)$ 的导数是负定的，则系统是渐进稳定的。这个概念可以应用到控制器的设计中。如果系统的李雅普诺夫函数的导数沿着闭环系统轨迹限于半负定或正定，则系统是绝对稳定或渐进稳定的。基于李雅普诺夫的控制器可以应用在混沌系统[19-21]、杜芬振子[22,23]、混沌摆[24]以及机器人技术[18]的同步控制中。其缺点是李雅普诺夫函数不一定可由一些特定的模型推断，而且选择参数太过传统，因此会影响系统的瞬态响应[18]。

经常把识别算法和控制算法结合在一起来促进在控制方程中有未知参数的动态系统的自适应控制理论。在自适应控制中，参数估计和控制同时进行。当系统参数的估计和控制操作根据估计参数计算，自适应控制原理可称为间接自适应控制。反之，在直接自适应控制中，控制器参数用一个自适应定律直接更新，自适应控制理论通过调整控制定律来确定系统的时变参数。尽管自适应控制通过线性模型来描述非线性系统，但是参数的反馈车削呈现整个系统的非线性响应。因此，自适应控制普遍应用于混沌系统的控制，如 Hénon 映射[25]、非线性单摆[26]、混沌同步化[27]以及超混沌系统[28]。基于模型的自适应控制需要系统的先验知识，其仅仅集中在时域操作。

虽然以上理论都表明了混沌控制的能力，然而，上面复习的混沌控制理论限用于自治、稳定的系统。尽管非线性动态主要与非自治系统有关，但它们都假设混沌系统是自治的。这些控制器善于处理“稳态混沌”，意思是混沌的状态不会改变。“稳态混沌”不会从分叉点过渡到分叉图中的混沌状态，响应的频谱带宽也不会改变。对于其混沌响应是“动态”的非自治、非平衡系统，这些混沌控制理论不能表示。下面将研究两个混沌控制的实例。

7.1.1　稳态和非稳态下 Hénon 映射的 OGY 控制

$\alpha>0$、$|\beta|<1$ 及 $r_n^2=x_n^2+y_n^2$ 的二维迭代（Hénon）映射函数为

$$\begin{cases}x_{n+1}=1+y_n-\alpha x_n^2\\ y_{n+1}=\beta x_n\end{cases}\tag{7.1}$$

如图 7.1 所示，当参数 α 增大时，系统出现分叉。因为 α 随时间变化，图 7.1 所示的非线性动态是非自治的、时变的。如果 $\beta=0.4$ 且 $\alpha=1.2$，响应是混沌吸引子，但是这是“静态混沌”的一种情况，其时间响应和频谱分析的范围保持不变。图 7.2 所示为应用 OGY 方法[30]时，Hénon 映射对应的时间响应和瞬时频率（IF）[29]。在图 7.2a 中，在第 300 个时间步长启动控制器，混沌响应在一个固定点上稳定。响应在积分时间步长 $t=0.1$s 处通过图 7.2b 中的 IF 检测，IF 图为 $t=30$s 和 $t=62$s 之间的瞬态，紧接着一个没有任何时间-频率变化的空区域。时间响应和 IF 表示的 OGY 方法可以稳定由静态 Hénon 映射产生的混沌吸引子。

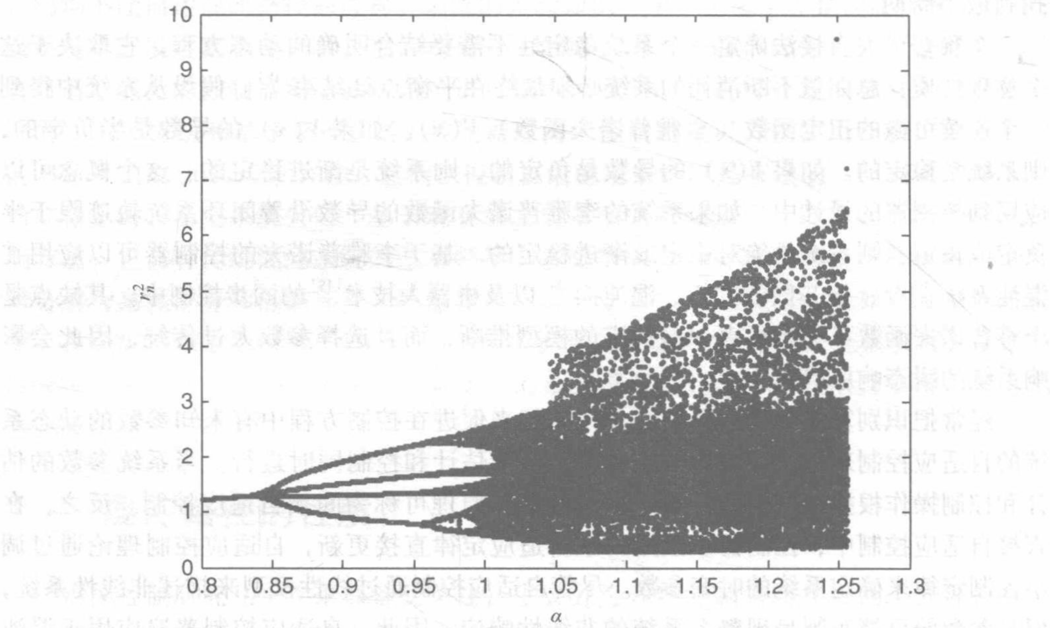


图 7.1　Hénon 映射的分叉图

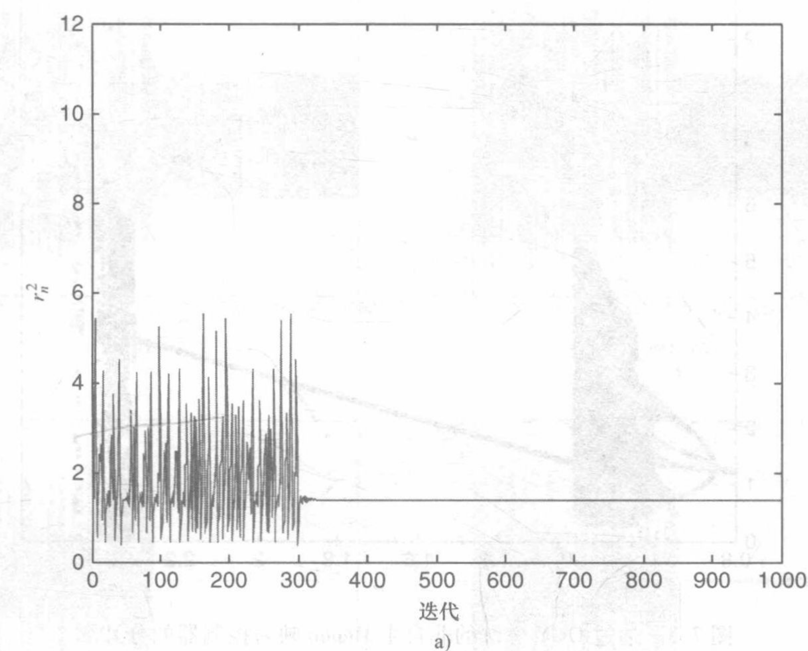
图 7.3 所示为通过相同 OGY 方法控制的非稳态 Hénon 映射的分叉图。其中控制参数 α 随时间递增，OGY 方法不能用于这种非自治、非稳态的系统。在图中，当 $\alpha=1.2$ 时控制器启动，对于一个稳定的系统，当控制器打开 r_n^2 将不变，这意味着系统在控制时只有一个频率。但在图 7.3 所示分叉图中的轨迹不再是一条水平线，说明频率是在变化的，且当 α 增加到 2.3 左右时突然出现混沌。因为 OGY 方法是基于 Poincaré 映射的非线性，所以结果并不令人惊讶。因此，它的稳态区域限制在平衡点附近。

7.1.2　稳态和非稳态下基于李雅普诺夫控制的杜芬振子

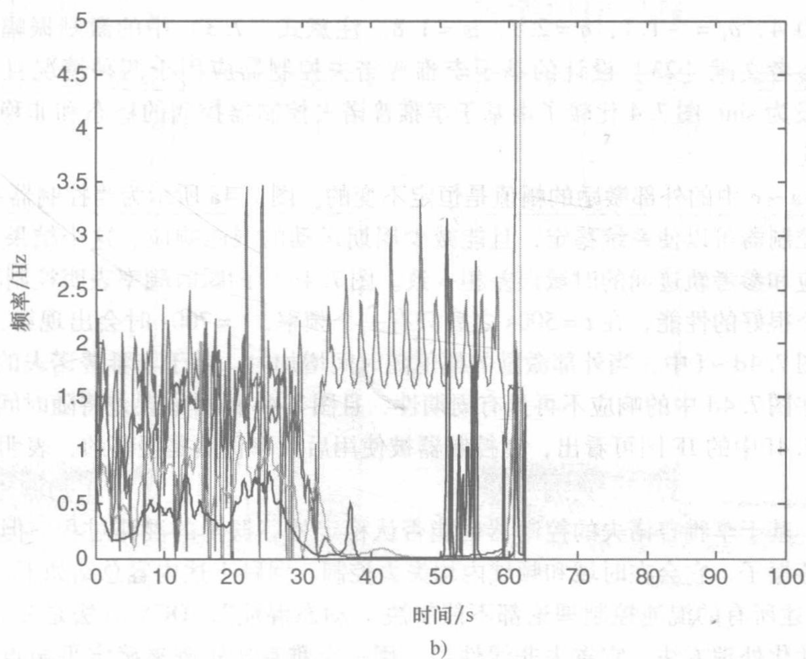
下面两个杜芬振子方程：

$$\ddot{x}+p\dot{x}+p_1x+x^3=q\cos(\omega t) \tag{7.2}$$

$$\ddot{x}+p\dot{x}+p_1x+x^3=(q+0.01t)\cos(\omega t) \tag{7.3}$$



a)



b)

图　7.2

a）时间响应　b）通过 OGY 方法的 Hénon 映射的瞬时频率

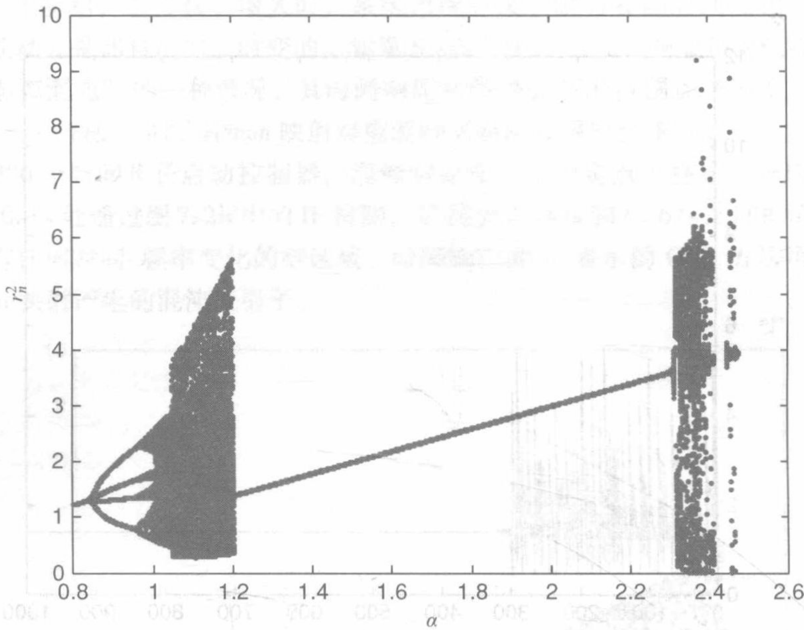


图 7.3　通过 OGY 方法的非自主 Hénon 映射控制器的分叉图

式中，$p=0.4$，$p_1=-1.1$，$q=2.1$，$\omega=1.8$。注意式（7.3）中的激励振幅是一个时间函数。参考文献［23］设计的基于李雅普诺夫控制器应用于两种情况且参考（目标）响应设为 $\sin t$。图 7.4 比较了由基于李雅普诺夫控制器控制的稳态和非稳态的杜芬振子的响应。

图 7.4a～c 中的外部激励的幅值是恒定不变的。图 7.4a 所示为当控制器在 $t=500$s 时启动，控制器可以使系统稳定，且能减少周期运动的混沌响应。这个结果与图 7.4b 中系统响应和参考轨迹间的时域误差相一致。图 7.4c 中的瞬时频率表明控制器在 IF 域中也有一个很好的性能，在 $t=500$s 之后只有一个频率，$t=700$s 时会出现第二个频率。相反，在图 7.4d～f 中，当外部激励的幅值随时间增加时，基于李雅普诺夫的控制器失去控制。在图 7.4d 中的响应不再具有周期性，且图 7.4e 的时域误差将随时间增加。此外，从图 7.4f 中的 IF 图可看出，在控制器被使用后频率仍然是振荡的，表明其非线性的存在[31]。

总之，基于李雅普诺夫的控制器也能否认稳定杜芬振子的混沌过程，但是对于不稳定的杜芬振子，它会在时域和频域内均失去控制。回顾上述内容总结如下：

1）上述所有的混沌控制理论都不能解决“动态混沌”。OGY 方法是基于 Poincaré 映射的线性化处理方法。它省去非线性项，用一个雅克比矩阵来确定平衡点附近的稳定性。这个方法适用于自治稳定系统，却不适用于非自治非稳定系统，因为 Poincaré 映射的后半个轨迹随时间变化。它们远离平衡点，在平衡点处通过雅克比矩阵建立的稳定性失效。基于李雅普诺夫的控制器也不适用于非自治、非稳定系统，因为系统参数的变化直接影响李雅普诺夫函数的推导。

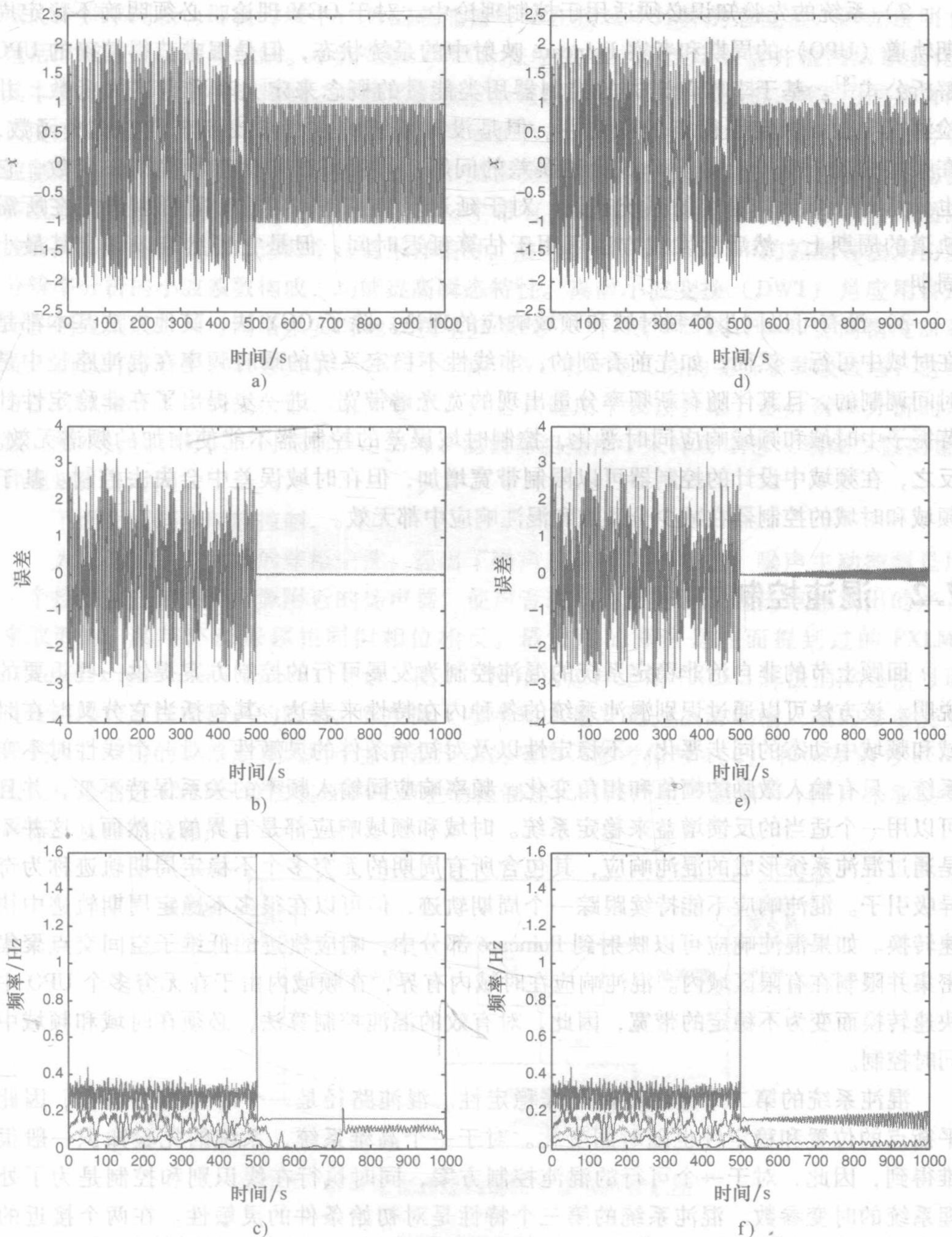


图7.4　(a)、(b)、(c) 分别为稳定的杜芬振子的时间响应、时间域误差和瞬时频率（IF），(d)、(e)、(f) 分别为不稳定的杜芬振子的时间响应、时间域误差和瞬时频率（IF）

2）系统的先验知识必须适用于控制理论中。对于 OGY 理论，必须明确不稳定周期轨道（UPO）的周期和考察 Poincaré 映射中的系统状态，但是很难获得精确的 UPO 解析公式[8]。基于李雅普诺夫的控制器用类能量的概念来定义李雅普诺夫函数，并检测其导数，决定平衡点的稳定性。但是没有系统的方法来找到李雅普诺夫函数，在某些情况下基本上是一个试验和误差的问题。即使可以得到李雅普诺夫函数，它也只是对于自治非稳定的系统来说。对于延迟反馈控制，延迟时间可以设定在所需轨道的周期上，然后启发式方法可用于估算延迟时间，但是它仍然难以确定其最小周期。

3）没有可以同步控制时域和频域响应的理论。除了 OGY 法，其他方法基本都是在时域中可行。然而，如先前看到的，非线性不稳定系统的瞬时频率在混沌路径中是时间调制的，且其伴随有新频率分量出现的宽光谱带宽，进一步提出了在非稳定性杜芬振子中时域和频域响应同时恶化，控制时域误差的控制器不能使增加的频谱无效。反之，在频域中设计的控制器可以限制带宽增加，但在时域误差中会失去控制。基于频域和时域的控制器在减少分叉点和混沌响应中都无效。

7.2　混沌控制的特性

回顾上节的非自治非稳定系统的混沌控制为发展可行的控制方案提供一些重要的说明。该方法可以通过识别混沌系统的各种内在特性来表达，其包括当它分叉时在时域和频域中动态的同步恶化、不稳定性以及对初始条件的灵敏性。对一个线性时不变系统，只有输入激励的幅值和相角变化，频率响应同输入频率的关系保持不变，并且可以用一个适当的反馈增益来稳定系统。时域和频域响应都是有界的，然而，这并不是通过混沌系统形成的混沌响应，其包含所有周期的无穷多个不稳定周期轨迹称为奇异吸引子。混沌响应不能持续跟踪一个周期轨迹，但可以在很多不稳定周期轨迹中快速转换。如果混沌响应可以映射到 Poincaré 部分中，响应轨迹的低维子空间交点聚集密集并限制在有限区域内。混沌响应在时域内有界，在频域内由于在无穷多个 UPO 中快速转换而变为不稳定的带宽，因此，对有效的混沌控制算法，必须在时域和频域中同时控制。

混沌系统的第二个通用特性是非稳定性。混沌路径是一个时间暂态过程，因此平衡点的位置和稳定性也随时间变化。对于一个高维系统，系统的先验知识一般很难得到，因此，对于一个可行的混沌控制方案，同时执行在线识别和控制是为了处理系统的时变参数。混沌系统的第三个特性是对初始条件的灵敏性。在两个接近的初始轨迹间的偏差会随着时间的增加呈现指数分叉，因此说明一个小扰动都会使系统变得不稳定。相反地，一个非线性系统也可以通过小扰动变稳定，这可通过早期开环混沌控制理论来说明，通过在其输入或系统参数中加入小扰动来稳定混沌系统。

一个可有效处理标识属性的物理性方法描述如下。Parseval 定理是为了使时域和频

域的分辨率同步，即在时域中计算的总能量等于在频域中计算的总能量，因此说明它包括时域控制和频域控制。小波变换（WT）在小波域中定位定时器并检测后期变化，其本质是一个同步的时频域。不像用正弦波来逼近信号的傅里叶分析，WT 用的是有限长度正交函数，并通过小波基函数的变换和扩大提供定位时间和频率分辨率。结合在控制理论方面的离散 WT 的研究说明，小波多分辨率是使用迭代滤波器组。小波滤波器组通过两平行滤波通道运行信号，即一个带有高通滤波器的通道和一个带有低通滤波器的通道滤波，通过这两个通道采样信号。参考文献［32-35］中的控制算法均由多分辨率分析的小波系数构成，均能提高瞬态特性。离散小波变换（DWT）是应用自适应控制规则通过神经网络来实时地识别未知系统[36-41]。减少负载计算和更高精度对系统识别是有好处的，参考文献［42］是应用 DWT 来替换长期的高阶泰勒级数法，这种方法可以减少系统的复杂性，增加效率，但它只适用于线性模型。多分辨率分析的系数一般本身就具有同步时频信息。另外，滤波器组操作中采样可以极大地减少数据量，并缩短计算时间。

下面介绍同步时频控制。

为了处理混沌系统的非稳定性，提出了噪声主动控制的概念。噪声主动控制是用一个控制算法来控制声源附近的扬声器，使声音减弱。声源是通过扬声器发出的声音来取消的，其与声源振幅相同但相位相反。最常用的算法是前面提到过的 FXLMS（filtered-x least-mean-square）算法。图 7.5 所示为怎样运用 FXLMS 算法消除在信号通道管道噪声系统中噪声的图解。噪声源（参考输入量）通过上游的输入端的参考麦克风进入，下游的误差麦克风用来监听输出端的噪声。参考信号 $x(n)$ 和误差信号 $e(n)$ 的处理是通过 FXLMS 算法实现的噪声主动控制器，可以产生控制信号 $y(n)$ 来驱动扬声器，从而消除噪声。

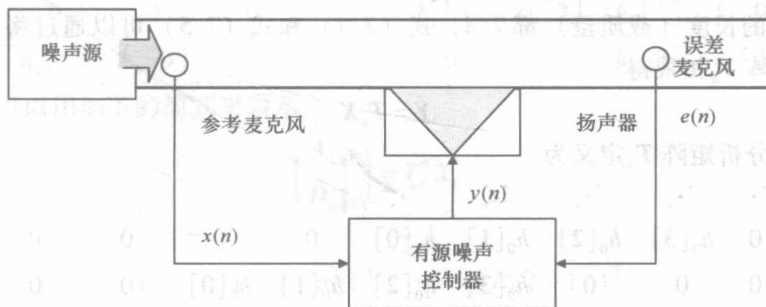


图 7.5　信号带宽通道的前馈主动噪声控制图[43]

除了噪声控制外，FXLMS 可以应用在抑制复合结构[44]、齿轮副[45]、建筑物[46]及机床[47]的振动上。FXLMS 也可以与其他控制器相结合，如 H_∞ 反馈鲁棒控制器[48]和 LQR 控制器[49]，来加快收敛速度和提高鲁棒性。虽然 FXLMS 用一个前馈自适应滤波器根据误差来改变输入，它仍需要系统的离线识别作为一个先验信息。然而，它可以通过增加自适应 FIR 滤波器实时的识别系统来修正。多分辨率分析（MRA）可以结合

到在线 FXLMS 结构中，通过在自适应滤波器前放置分析滤波器组来控制小波系数，然后用合成的方法来重建控制信号。这个重构的原理具有共同的时频分辨率且服从在线 FXLMS 算法来控制非自治非稳态系统。

1. 时域离散小波变换

同步时频控制可以通过控制时域中的离散小波系数来实现[50,51]，新的控制方法是结合离散小波变换（DWT）和最小均方自适应滤波器来实现前馈控制、在线识别[52]以及采用 FXLMS 算法[43,53]来构建并行自适应滤波器组。在第 5 章中说明时域中的 DWT 可以通过两通道滤波器组迭代来传递输入信号，如图 7.6 所示。

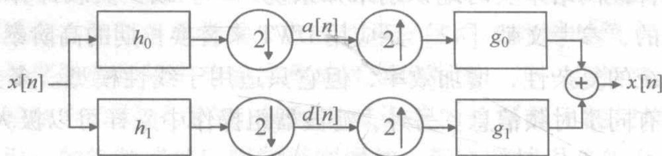


图 7.6　时域中的两通道滤波器组

假设无穷输入信号序列 $x[n]$ 有实数，图 7.6 所示的分解过程包括一个高通滤波器 h_0 和低通滤波器 h_1 的输入 $x[n]$，其次通过这两个滤波器降采样。逼近系数 $a[n]$ 和细节系数 $d[n]$ 在时域中计算得

$$a[n]=\sum_k h_0[2n-k]x[k]=\sum_k h_0[k]x[2n-k] \tag{7.4}$$

$$d[n]=\sum_k h_1[2n-k]x[k]=\sum_k h_1[k]x[2n-k] \tag{7.5}$$

式中，整数 $n=0,\cdots,\infty$。假设正交滤波器组的长度相等甚至更长，高通滤波器 h_0 和低通滤波器 h_1 的长度（或质量）都为 4，式（7.4）和式（7.5）可以通过将信号和一个线性变换矩阵 $\boldsymbol{T}_a$ 相乘得

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}_a\boldsymbol{X} \tag{7.6}$$

式中，无限分析矩阵 $\boldsymbol{T}_a$ 定义为

$$\boldsymbol{T}_a=\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ \cdots & 0 & h_0[3] & h_0[2] & h_0[1] & h_0[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & h_0[3] & h_0[2] & h_0[1] & h_0[0] & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0[3] & h_0[2] & h_0[1] & h_0[0] & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & h_1[3] & h_1[2] & h_1[1] & h_1[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & h_1[3] & h_1[2] & h_1[1] & h_1[0] & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1[3] & h_1[2] & h_1[1] & h_1[0] & 0 & \cdots \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

X 是输入信号的无限数组，Y 是由小波逼近值和细节系数组成，可以表示为

$$Y = (\cdots \quad a[0] \quad a[1] \quad a[2] \quad \cdots \quad d[0] \quad d[1] \quad d[2] \quad \cdots)^{\mathrm{T}} \tag{7.8}$$

对于一个有限的信号，补零的方法指在有限信号前或后加零，使其变为无限。补零法可以应用到式（7.6）中，但是非零值的数量每次会因为卷积操作而增加。为了防止非零值的增加，有限信号假定是周期的，用有限信号的值来取代丢失的样本，这一过程称为周期化。假设式（7.6）中的输入信号 X 是周期性的且周期为 N。

$$X = (\cdots \quad x[0] \quad x[1] \quad \cdots \quad x[N-1] \quad x[0] \quad x[1] \quad \cdots \quad x[N-1] \quad \cdots)^{\mathrm{T}} \tag{7.9}$$

式（7.9）可以简化为

$$X^N = (x[0] \quad x[1] \quad \cdots \quad x[N-1])^{\mathrm{T}} \tag{7.10}$$

因为转换信号的周期也为 N，选择 Y 中 N 个连续输入来表示，因此有限信号 X^N 转换为另一个长度相等的有限信号 Y^N，分析矩阵 T_a 也可以简化为 $N \times N$ 的矩阵 T_a^N，可以避免信号的延长。把 T_a^N 中去掉的滤波系数放回到矩阵中的适当位置，使其与周期信号特征一致，式（7.6）可以转化为

$$Y_{k+1}^N = T_a^N X_k^N \tag{7.11}$$

式中，k 是分解的层数。当 $N=8$，矩阵可以简化分析为

$$T_a^N = \begin{pmatrix} h_0[3] & h_0[2] & h_0[1] & h_0[0] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0[3] & h_0[2] & h_0[1] & h_0[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0[3] & h_0[2] & h_0[1] & h_0[0] \\ h_0[1] & h_0[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0[3] & h_0[2] \\ h_1[3] & h_1[2] & h_1[1] & h_1[0] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1[3] & h_1[2] & h_1[1] & h_1[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1[3] & h_1[2] & h_1[1] & h_1[0] \\ h_1[1] & h_1[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1[3] & h_1[2] \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{7.12}$$

式（7.11）可以用如下的简式来表示

$$\begin{pmatrix} A_{k+1} \\ D_{k+1} \end{pmatrix} = T_a^N X_k^N \tag{7.13}$$

有

$$A_{k+1} = (a[0] \quad a[1] \quad \cdots \quad a[N/2-1])^{\mathrm{T}} \tag{7.14}$$

$$D_{k+1} = (d[0] \quad d[1] \quad \cdots \quad d[N/2-1])^{\mathrm{T}} \tag{7.15}$$

合成矩阵 T_s^N 可以构成

$$T_a^N T_s^N = I^N \tag{7.16}$$

意味着

$$T_s^N = (T_a^N)^{-1} \tag{7.17}$$

对于正交滤波器，有

$$(T_a^N)^{-1} = (T_a^N)^{\mathrm{T}} \tag{7.18}$$

当 $k=0$ 时，式（7.13）为 DWT 分解的第一层。DWT 分解的第二层可以用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k+2} \\ \boldsymbol{D}_{k+2} \\ \boldsymbol{D}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_a^{N/2} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}^{N/2} \end{pmatrix} \boldsymbol{T}_a^N \boldsymbol{X}_k^N \tag{7.19}$$

同样地，第三层分解可以表示为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k+3} \\ \boldsymbol{D}_{k+3} \\ \boldsymbol{D}_{k+2} \\ \boldsymbol{D}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_a^{\frac{N}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}^{\frac{N}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I}^{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_a^{N/2} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}^{N/2} \end{pmatrix} \boldsymbol{T}_a^N \boldsymbol{X}_k^N \tag{7.20}$$

这个过程可以扩展到更高层，相应的合成可以通过矩阵乘积的转置来完成。

2. DWT 和 LMS 自适应滤波器的结合

图 7.7 所示是常见的有限脉冲响应（FIR）滤波器，其为图 3.1 的另一个表现形式。给出一组 N 个滤波系数，$\omega_j(n)$，$j=0$，1，…，$N-1$ 以及数据系列 $\{x(n)$，$x(n-1)$，…，$x(n-N+1)\}$，输出信号可以通过下式计算：

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k(n) x(n-k) \tag{7.21}$$

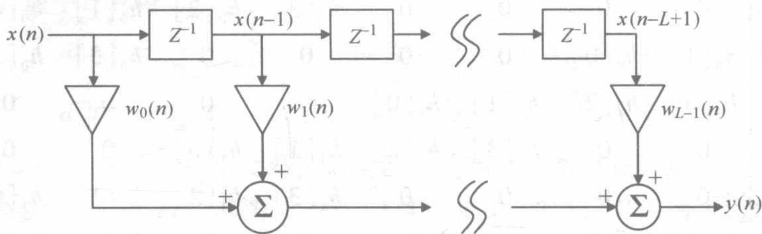


图 7.7　FIR 数字滤波器的原理框图

输入矢量和权重矢量在时间 n 上可以分别定义为 $\boldsymbol{X}(n)$ 和 $\boldsymbol{W}(n)$

$$\boldsymbol{X}(n) = [x(n) \quad x(n-1) \quad \cdots \quad x(n-N+1)]^{\mathrm{T}} \tag{7.22}$$

$$\boldsymbol{W}(n) = [\omega_0(n) \quad \omega_1(n) \quad \cdots \quad \omega_{N-1}(n)]^{\mathrm{T}} \tag{7.23}$$

对于 $N \times N$ 阶的 DWT 转换矩阵 $\boldsymbol{T}$，可以计算出输出信号 $y(n)$，然后通过下式来与期望响应比较以确定误差信号，即

$$y(n) = \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(n) \boldsymbol{T} \boldsymbol{X}(n) \tag{7.24}$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \tag{7.25}$$

最陡下降法用于减少误差信号的均方差，最小均方（LMS）算法用来更新权重矢量，即

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) + \mu \boldsymbol{T} \boldsymbol{X}(n) e(n) \tag{7.26}$$

式中，μ 是稳定控制和收敛速度的步长。基于小波变换 LMS 自适应滤波器的结构如图 7.8 所示。

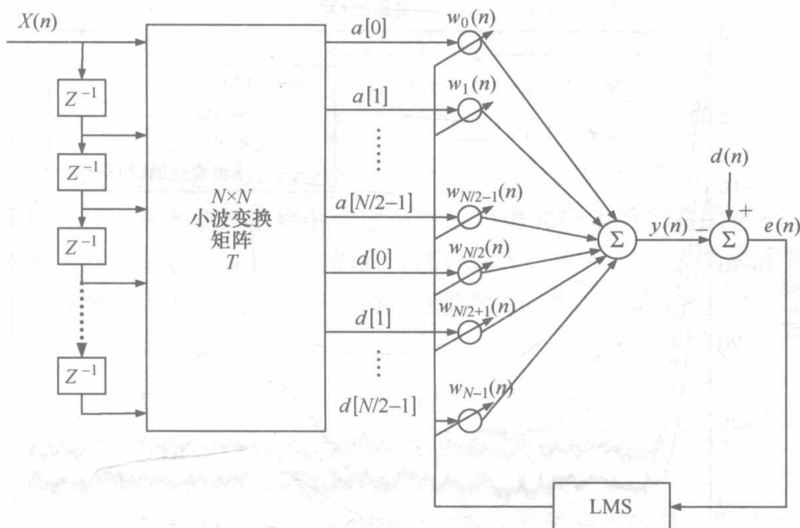


图 7.8　基于小波变换 LMS 自适应滤波器的结构图

Haykin 书[53]中的线性弥散信道产生一个随机输入序列 $\{x_n\}$ 的未知畸变，用来比较基于小波变换 LMS、LMS、LMS 归一化（NLMS）及递推最小二乘法（RLS）的性能。通道的脉冲响应可以用余弦来表示，即

$$h_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{1+\cos\left[\frac{2\pi}{W}(n-2)\right]\right\}, & n=1,2,3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{7.27}$$

式中，参数 $W=3.7$ 控制由通道产生的幅值失真量，信噪比大概是 30dB，过滤阀为 32。如图 7.9 所示，第一层是 Daubechies-2（db2）小波，说明基于小波变换的 LMS 具有较好的收敛性能。

3. 同步时频控制原理

图 7.10 所示为 FXLMS 算法，与图 3.3 相同，只是符号设置略有不同。主路径 $P(z)$ 为从参考源 $x(n)$ 到误差传感器的路径，可以实现噪声衰减。自适应滤波器 $W(z)$ 为主路径 $P(z)$ 和第二路径 $S(z)$ 的同步模型提供一个自适应方法，用一个给定的输入源来使剩余噪声 $e(n)$ 最小化。为了确保 LMS 算法的收敛性，在参考源通道处放置相同的滤波器 $\hat{S}(z)$ 来更新 LMS 算法的权重。

FXLMS 是通过一个不同的目标来确定和修改，FXLMS 是基于叠加原则，其自适应滤波器是用参考源附近的噪声产生一个补偿信号来取消噪声，然后利用剩余误差来适应有源滤波器的系数，从而使均方差最小化，这个概念构建了一种基于小波变换有并行在线建模技术的时频控制器。小波变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 放在两个 FIR 自适应滤波器前面，使时域离散信号转化为小波系数矩阵，即通过非线性时频控制算法图 7.11 中的粗箭头线所示，用小波系数乘以 FIR 滤波器的权重来重构时域信号。

为了合并 $N\times N$ 转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和长度为 N 的有源滤波器，信号的矢量可以定义为

图 7.9　LMS、NLMS、RLS 以及基于小波变换的 LMS 的性能

图 7.10　FXLMS 算法

图 7.11　基于小波变换时频域控制器的结构图

$$\boldsymbol{X}(n)=[x(n) \quad x(n-1) \quad \cdots \quad x(n-N+1)]^{\mathrm{T}} \tag{7.28}$$

$$\boldsymbol{U}(n)=[u(n) \quad u(n-1) \quad \cdots \quad u(n-N+1)]^{\mathrm{T}} \tag{7.29}$$

$$\boldsymbol{X}'(n)=[x'(n) \quad x'(n-1) \quad \cdots \quad x'(n-N+1)]^{\mathrm{T}} \tag{7.30}$$

$$\boldsymbol{E}(n)=[e(n) \quad e(n-1) \quad \cdots \quad e(n-N+1)]^{\mathrm{T}} \tag{7.31}$$

$$\boldsymbol{F}(n)=[f(n) \quad f(n-1) \quad \cdots \quad f(n-N+1)]^{\mathrm{T}} \tag{7.32}$$

这些信号矢量在每次迭代过程中通过在数组中增加输入数据并丢掉第 N 个数据来更新。因此两个连续信号矢量共用它们的大部分输入。第一个自适应滤波器 $\boldsymbol{W}_1$用于模拟在线混沌系统的模型中，而第二个自适应滤波器 $\boldsymbol{W}_2$适用于反馈控制器。权重矢量为

$$\boldsymbol{W}_1(n)=[\omega_{1,0}(n) \quad \omega_{1,1}(n) \quad \cdots \quad \omega_{1,N-1}(n)]^{\mathrm{T}} \tag{7.33}$$

$$\boldsymbol{W}_2(n)=[\omega_{2,0}(n) \quad \omega_{2,1}(n) \quad \cdots \quad \omega_{2,N-1}(n)]^{\mathrm{T}} \tag{7.34}$$

预期信号 $d(n)$ 和 $\boldsymbol{W}_1$的输出信号间的辨识误差可以由下式计算得

$$\bar{e}(n)=\bar{y}(n)-d(n) \tag{7.35}$$

式中，$\bar{y}(n)=\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{TU}(n)$。预期信号和混沌系统输出信号的误差为

$$e(n)=d(n)-y(n) \tag{7.36}$$

通过式（7.35）和式（7.36），序列输入可以定义为

$$f(n)=e(n)-\bar{e}(n) \tag{7.37}$$

自适应滤波器的权重通过最小均方算法来更新：

$$\boldsymbol{W}_1(n+1)=\boldsymbol{W}_1(n)-\mu_1\boldsymbol{TU}(n)f(n) \tag{7.38}$$

$$\boldsymbol{W}_2(n+1)=\boldsymbol{W}_2(n)+\mu_2\boldsymbol{TX}'(n)e(n) \tag{7.39}$$

式中，$\boldsymbol{X}'(n)=\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{TX}(n)$；$\mu_1$、$\mu_2$均为步长。

4. 参数的最优化

基于小波变换的时频域控制器的性能由一些参数决定，如母小波、分解层数，以及其他一些参数。峰值和波峰因数这两个时域的指数可以优化参数辨识，最能表示驱动信号的特征[55]。

$$\text{Kurtosis}=\frac{\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x(n)-\bar{x})^4}{\left[\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x(n)-\bar{x})^2\right]^2} \tag{7.40}$$

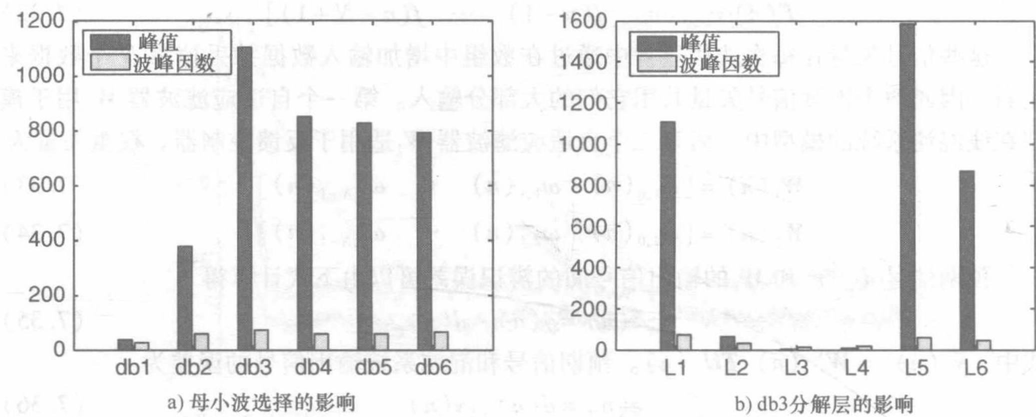
$$\text{Crest Factor}=\frac{\text{Crest Value}}{\text{RMS}}=\frac{\sup|x(n)|}{\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[x(n)]^2}} \tag{7.41}$$

式中，$x(n)$ 是信号；N 是样本数；$\bar{x}$ 是样本平均值。

图 7.12 说明这两个指数值和 Daubechies 小波群[56] 以及分解层有关，说明 Daubechies-3（db3）小波最能描述具有最高峰值和波峰因数的信号，尽管分解层 5 有最高峰值，但选择分解层 1 来减轻计算负载。

当基于小波变换的时频控制器应用在分叉系统时，均可抑制时域和频域的响应，并保持系统的周期运动。因此通过由控制器施加的缓解使动态系统在其最终恶化为混

沌系统前有效地稳定下来，把自适应控制、有源噪声控制和基于小波变换的 FIR 滤波器的概念都结合起来，基于小波的时频控制器可在时频域中发挥控制作用，则可以与哲学、建筑学中的控制器和减少非线性非稳定性响应（如分叉处和混沌路径）性能区分开来。



a) 母小波选择的影响　　b) db3分解层的影响

图 7.12　母小波和小波分解层的选择

7.3　混沌控制的有效性

前面提到的控制方案的机理是控制器必须能够在频率响应太宽前抑制时频同步响应的恶化，其用实时系统识别的自适应滤波器来解决混沌路径的系统的非稳定性，外加的自适应滤波器可以用来调节输入信号，补偿在分叉处产生的新频率，并跟踪参考信号。同样地，之前章节详细说明的控制原理能同步在时域和频域内控制混沌系统。该控制器结构采用有源噪声控制算法（滤波-x 最小均方），即用一个可自动调节的有限脉冲响应（FIR）滤波器来识别系统，另一个可自动调节的 FIR 滤波器来消除无法控制的输入。分析小波滤波器组在加入控制器和结合控制输入的合成法前分解输入信号，通过将输入信号投影到小波滤波器组跨越的正交子空间，改善了最小均方算法的收敛性。另外，由 DWT 解决信号在不同尺度上对应连续倍频的分量，移动小波滤波器来提取信号的瞬时内容。Daubechies 正交的 db2 小波用于控制通过两种杜芬振子产生的双周期分叉。由于高阶的 Daubechies 小波函数不会提供改良的时间和频率分辨率或特定的杜芬振子更好的控制性能，db2 小波可以用来选择短滤波器的长度[56]。结合 db2 小波的控制法本质上是在同步时频域中建立的。

不稳定外部激励的双稳式杜芬振子用如下系统参数来研究：$\mu=0.4$，$\beta=1$，$\alpha=-0.8$，$a=0.32$，$b=3\times10^{-5}$，$\omega=0.78$。

$$\ddot{x}+\mu\dot{x}+\beta x+\alpha x^3=(a+bt)\cos(\omega t) \tag{7.42}$$

选择杜芬振子来说明前面提到的控制方法，因为它说明双周期分叉进入通往混沌的道路，这是一系列非线性系统共有的属性。对于有非线性弹性的周期强制振荡的例子，

杜芬方程是最常用的研究方程。杜芬振子时频控制的确定和表示如下，对文献中所有记录和可用的控制方法提供了一种替代法。

图 7.13a 和 b 中的时间响应和分叉图说明运动最初是周期的。当激励幅值随时间增加，运动会变为双周期分叉。当多重周期出现时，系统会变为混沌系统。伴随一个增加但有界的频率带宽，分叉在这一阶段变得突出。当激励幅值超过 0.42 时，响应会变为无界的。图 7.13c 所示的瞬时频率说明主频率是在 0.1 ~ 0.15Hz 之间振动，第二频率是在 0.05 ~ 0.1Hz 之间，第三频率是在 0.03Hz 左右，它们都为由无限带宽的频谱说明暂态模型的性能和奇异点。当主频率失去其特性且出现第二个分量，其频率是主频的一半时，在 $t=2700\mathrm{s}$ 处开始出现双周期分叉。随着激励幅值的增加，系统进入通往混沌的道路，所有频率都用于表示动态恶化的暂态模型振子的不同模式。在 $t=3300\mathrm{s}$ 时，不稳定状态到达一个使系统不再有界的点上。这个现象类似于很多实际的复杂非线性系统，包括船的倾覆。

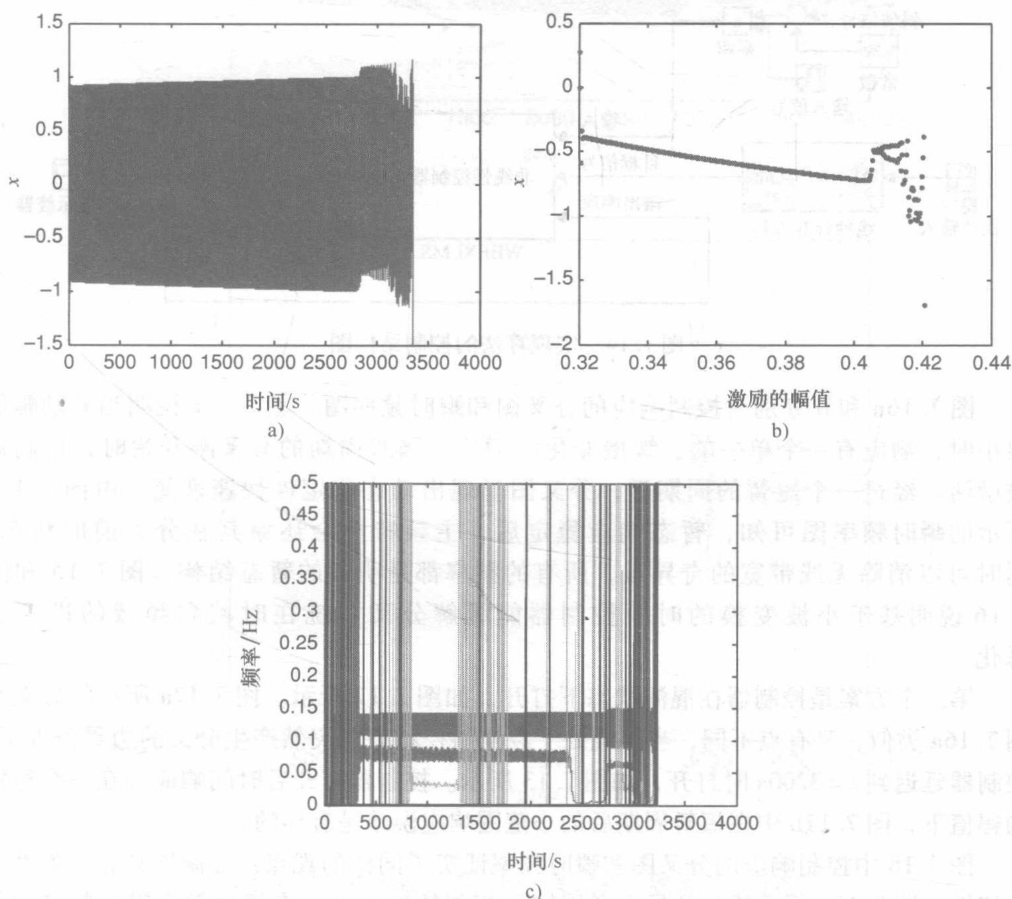


图　7.13

a）时间响应　b）分叉图　c）外部激励的非稳定杜芬振子的瞬时频率

为了证明基于小波变换的时频控制在减少混沌路径的性能，两种情况与图 7.13 中的基准线情况不符。控制器是为这种特定任务构建的。图 7.14 大致给出了结构和实现算法。首先，当随着有限个瞬时模型振荡，相应的频谱仍然是窄频带，控制器在分叉的始端打开。其次，当相应的频谱为宽频带时，控制器在混沌状态中被激活。第一个方案的结果如图 7.15 所示。图 7.15a 所示为控制信号的时间响应，控制器在 $t=3000$s 时打开，包括迅速控制响应的幅值，因此对比图 7.13a 中没有控制器应用在通向混沌道路否定状态的情况下，控制器预期的信号是通过使用稳定外部激励作为线性杜芬振子的输入来设计的。输出信号和预期信号的误差如图 7.15b 所示。在控制器打开前的误差为零，可以忽略不计，控制器打开后时域误差有一个很小的范围。

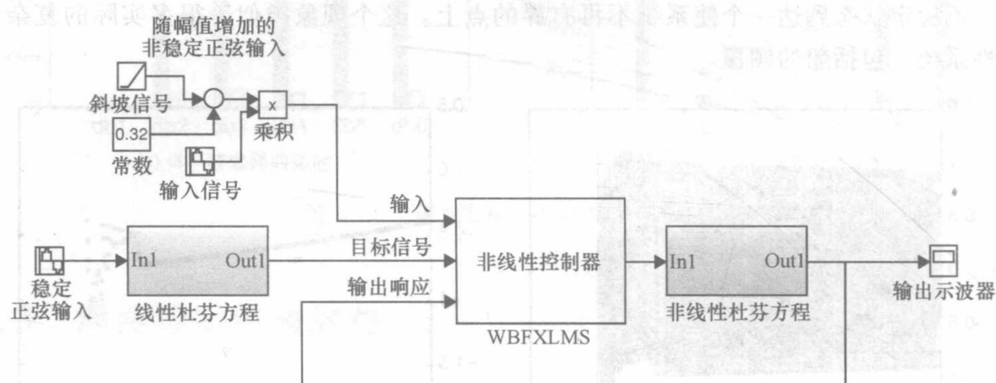


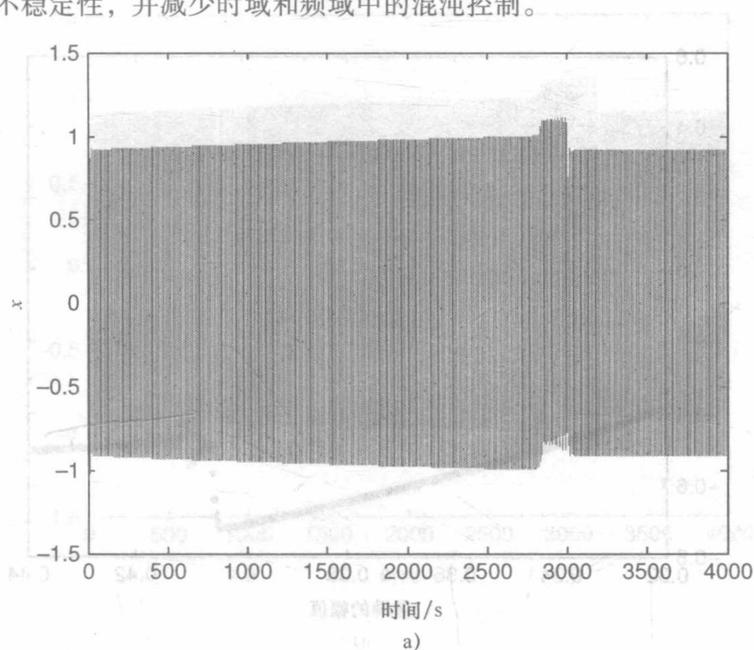
图 7.14　实现算法的控制结构图

图 7.16a 和 b 分别为控制响应的分叉图和瞬时频率图。图 7.16a 说明当激励幅值很小时，响应有一个单一的、缓慢变化的频率。当双周期的分叉刚开始时，控制器被激活。经过一个短暂的周期后，分叉图呈现出动态稳定性快速恢复。由图 7.16b 所示的瞬时频率图可知，暂态响应稳定后，主频特性会还原其在分叉前的状态，同时可以消除无线带宽的奇异点，所有的频率都是明确的暂态结构。图 7.15 和图 7.16 说明基于小波变换的时频控制器能缓解分叉系统在时域和频域的进一步恶化。

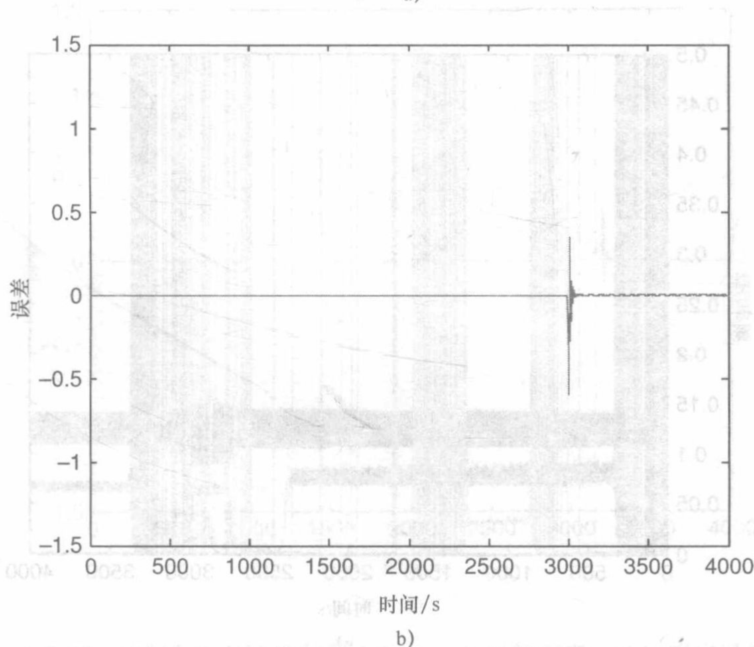
第二个方案是控制器在混沌状态下打开，如图 7.17 所示。图 7.17a 所示的方案与图 7.16a 类似，又有点不同，当系统处于混沌路径状态和突然产生分叉的边界条件下，控制器延迟到 $t=3200$s 时打开，如图 7.13 所示。控制器打开后时间响应处在一个稳定的幅值下，图 7.17b 中在短暂周期后的小范围响应误差是有界的。

图 7.18 中控制响应的分叉图和瞬时频率证实了同样的观点：控制器具有有效性和鲁棒性。图 7.18a 所示的分叉是大量周期和相似轨迹以及一个增加但有限的频谱的状态。基于小波变换的时频控制器在特定时期和动态不稳定状态下激活，经过一小段时间后，分叉图的轨迹变稳定了，变为一条线段，表示单一频率状态。图 7.18b 所示是相应的瞬态频率，其中有频率多模式并存和大量的暂态误差。当控制器在 $t=3200$s 时

打开，主频处于分叉重构和消除多余频率前的模式下。图7.17和图7.18说明控制器可以消除动态不稳定性，并减少时域和频域中的混沌控制。



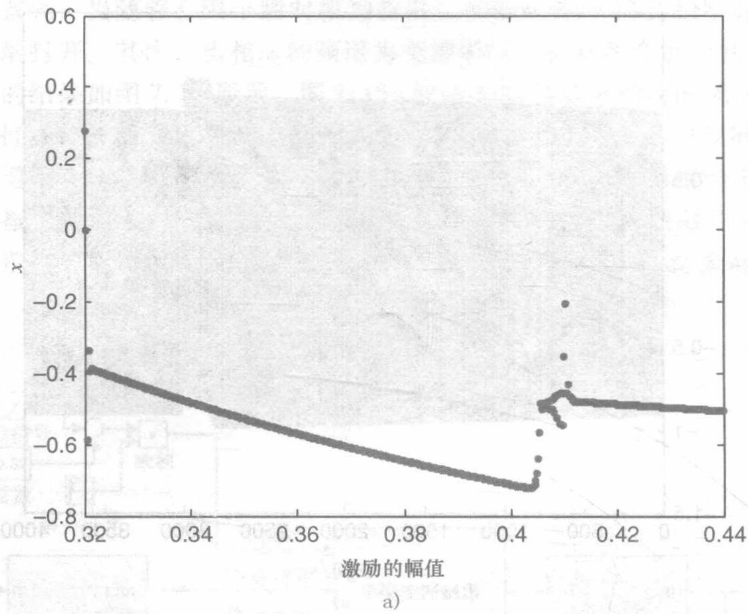
a)



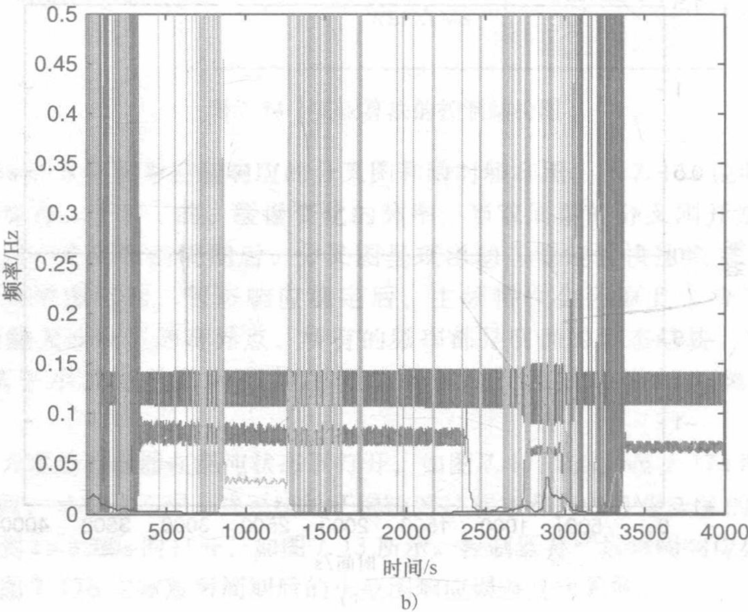
b)

图7.15 控制器在双周期分叉的初始状态下打开的

（a）时间响应、（b）响应误差



a)



b)

图 7.16　控制器在双周期分叉的初始状态下打开的（a）分叉图、（b）瞬时频率

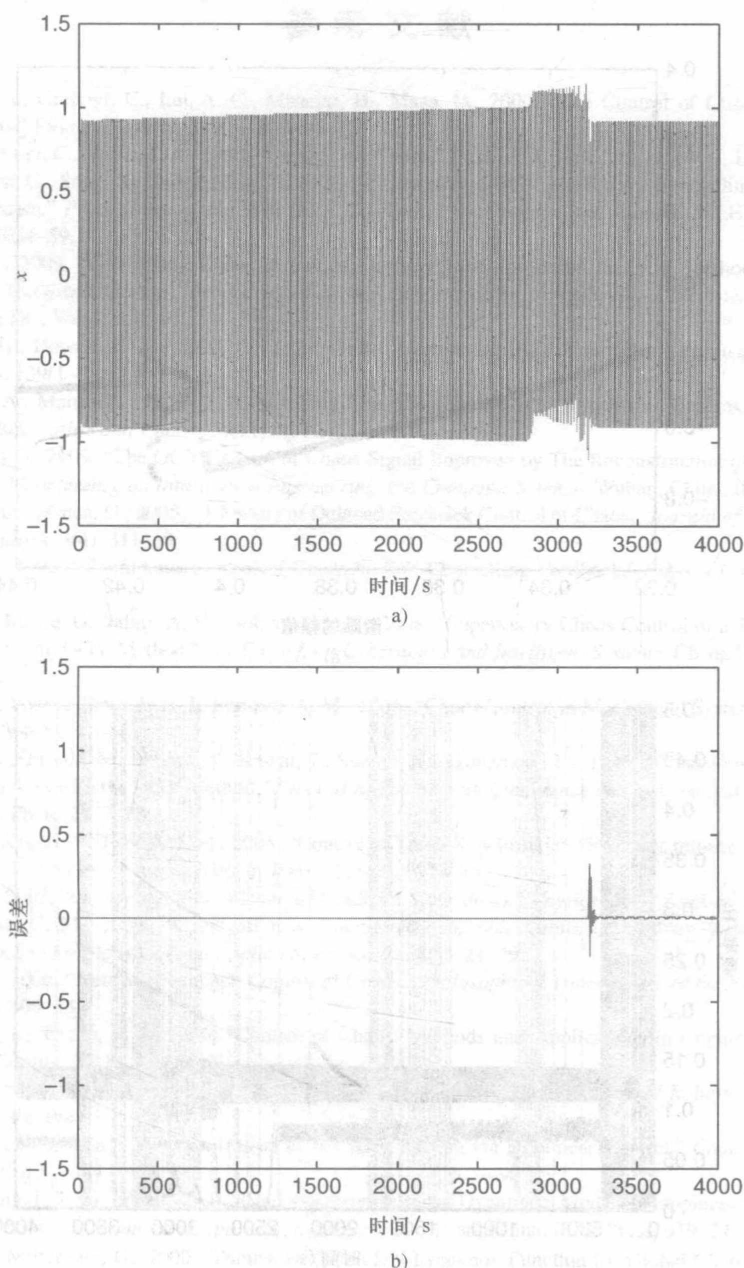
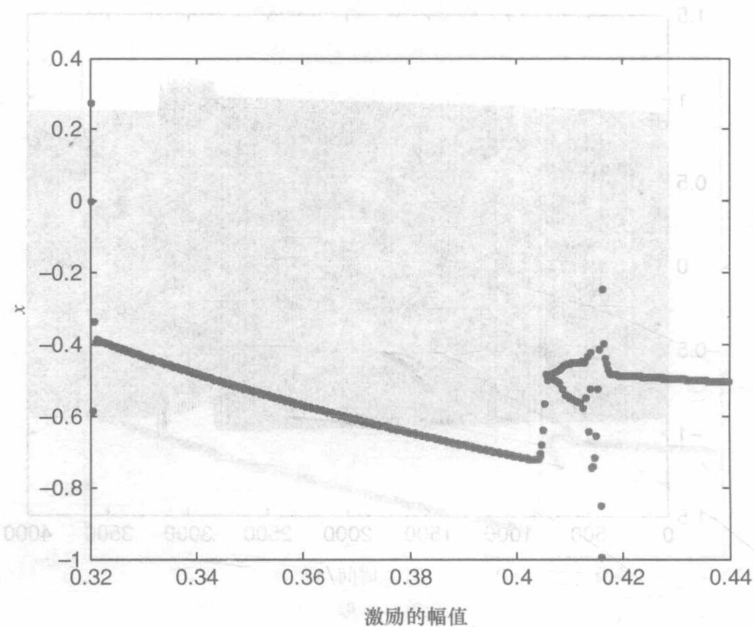
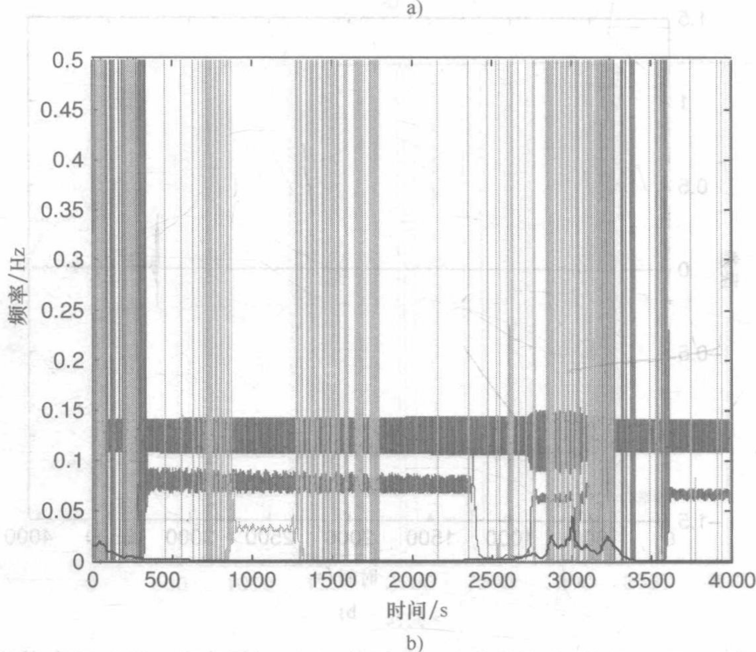


图 7.17 控制器在混沌状态下打开的（a）时间响应、（b）响应误差



a)



b)

图 7.18　控制器在混沌状态下打开的（a）分叉图、（b）瞬时频率

参考文献

[1] Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y. C., Mancini, H., Maza, D., 2000, "The Control of Chaos: Theory and Applications," *Physics Reports*, 329(3), 103–96.

[2] Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J. A., 1990, "Controlling Chaos," *Physical Review Letters*, 64(1), 1196–99.

[3] Yu, X., Chen, G., Song, Y., Cao, Z., Xia, Y., 2000, "A Generalized OGY Method for Controlling Higher Order Chaotic System," *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE Press, Sydney, Australia, 2054–59.

[4] Sanayei, A., 2009, "Controlling Chaos in Forced Duffing Oscillator Based on OGY Method and Generalized Routh-Hurwitz Criterion," *Second International Conference on Computer and Electrical Engineering*, Washington DC, Vol. 2, 591–95.

[5] Epureanu, B., Dowell, E. H., 2000, "Optimal Multi-Dimensional OGY Controller," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 139(1–2), 87–96.

[6] Boukabou, A., Mansouri, N., 2004, "Controlling Chaos in Higher-Order Dynamical Systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(11), 4019–25.

[7] Wang, R, Yi, X, 2009, "The OGY Control of Chaos Signal Improved by The Reconstruction of Phase Space," *International Conference on Information Engineering and Computer Science*. Wuhan, China, IEEE Press

[8] Tian, Y., Zhu, J., Chen, G., 2005, "A Survey of Delayed Feedback Control of Chaos," *Journal of Control Theory and Applications*, 3(4), 311–19.

[9] Pyragas, K., 1992, "Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback," *Physics Letters A*, 170(6), 421–28.

[10] Nazari, M., Rafiee, G., Jafari, A. H., Golpayegani, S., 2008, "Supervisory Chaos Control of a Two-Link Rigid Robot Arm Using OGY Method," *IEEE Conf. on Cybernetics and Intelligent Systems*, Chengdu, China, IEEE Press 41–46.

[11] Savi, M. A., Pereira-Pinto, F. H. I., Ferreira, A. M., 2006, "Chaos Control in Mechanical Systems," *Shock and Vibration*, 13(4–5), 301–4.

[12] OGAWA, A., Yasuda, M., Ozawa, Y., Kawai, T., Suzuki, R., Tsukamoto, K., 1996, "Controlling Chaos of the Forced Pendulum with the OGY Method," *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, IEEE Press, 2377–78.

[13] Okuno, H., Kanari, Y., Takeshita, M., 2005, "Control of Three-Synchronous-Generator Infinite-Bus System by OGY Method," *Electrical Engineering in Japan*, 151(2), 1047–53.

[14] Morgül, Ö., 2003, "On the Stability of Delayed Feedback Controllers," *Physics Letter A*, 314(4), 278–85.

[15] Postlethwaite, C. M., 2009, "Stabilization of Long-Period Periodic Orbits Using Time-Delayed Feedback Control," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 8(1), 21–39.

[16] Pyragas, K., 2006, "Delayed Feedback Control of Chaos," *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 364(1846), 2309–34.

[17] Fradkov, A. L., Evans, R. J., 2005, "Control of Chaos: Methods and Applications in Engineering," *Annual Reviews in Control*, 29(1), 33–56.

[18] Behal, A., Dixon, W., Dawson, D. M., Xian, Bin, 2010, *Lyapunov-Based Control of Robotic Systems*, Boca Raton, FL, CRC Press.

[19] Park, H. J., 2005, "Chaos Synchronization of A Chaos System via Nonlinear Control," *Chaos, Solitons and Fractals*, 25(3), 579–84.

[20] Song, L., Yang, J., 2009, "Chaos Control and Synchronization of Dynamical Model of Happiness with Fractional Order," *Industrial Electronics and Applications conference*, Xi'an, China, IEEE Press, 919–24.

[21] Daafouz, J., Millerioux, G., 2000, "Parameter Dependent Lyapunov Function for Global Chaos Synchronization of Discrete Time Hybrid Systems," *Control of Oscillations and Chaos 2nd International Conference*, St Petersburg, Russia, IEEE Press, Vol. 2, 339–42.

[22] Yang, Z., Jiang, T., Jing, Z, 2010, "Chaos Control in Duffing-Van Der Pol System," *International Workshop on Chaos-Fractal Theory and its Applications*, 106–10.

[23] Nijmeijer, H., Berghuis, H., 1995, "On Lyapunov Control of the Duffing Equation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 42(8), 473–77.

[24] Wang, R., Jing, Z., 2004, "Chaos Control of Chaotic Pendulum System," *Chaos, Solitons and Fractals*, 21(1), 201–7.

[25] Yazdanpanah, Am., Khaki-Sedigh, A., Yazdanpanah, Ar., 2005, "Adaptive Control of Chaos in Nonlinear Chaotic Discrete-time systems," *International Conference on Physics and Control*, 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, Beijing, China, IEEE Press, 913–15.

[26] Bessa, W. M., Paula, A. S., Savi, M. A., 2009, "Chaos Control using an Adaptive Fuzzy Sliding Mode Controller with Application to a Nonlinear Pendulum," *Chaos, Solitons and Fractals*, 42(2), 784–91.

[27] Huang, L., Yin, Q., Sun, G., Wang, L., Fu, Y., 2008, "An Adaptive Observer-based Nonlinear Control for Chaos Synchronization," *2nd International Symposium on System and Control in Aerospace and Astronautics*, Shenzhen, China, IEEE Press, 1–4.

[28] Chen, D. Y., Ma, X. Y., 2010, "A Hyper-chaos with only One Nonlinear Term and Its Adaptive Synchronization and Control," *Control and Decision Conference*, Shenzhen, China, IEEE Press, 1689–94.

[29] Yang, B, Suh, C.S., 2004, "On The Nonlinear Features of Time-Delayed Feedback Oscillators," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 9(5), 515–29.

[30] Lynch, S., 2003, *Dynamical Systems with Applications using MATLAB®*, Chapter 6, Birkhäuser, New York.

[31] Yang, B., Suh, C.S., 2003, "Interpretation of Crack Induced Nonlinear Response Using Instantaneous Frequency," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(3), 491–513.

[32] Jeevan, L. G., Malik, V., 2010, "A Wavelet Based Multi-Resolution Controller," *Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences*, 2(special issue), 17–21.

[33] Cloe, M. O. T., Keogh, P. S., Burrows, C. R., Sahinkaya, M. N., 2006, "Wavelet Domain Control of Rotor Vibration," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part:C Journal of Mechanical Engineering Science*, 220(2), 167–84.

[34] Tsotoulidis, S., Mitronikas, E. and Safacas, A., 2010, "Design of A Wavelet Multiresolution Controller for a Fuel Cell Powered Motor Drive System," *XIX International Conference on Electrical Machine*, Rome, IEEE Press.

[35] Cade, I. S., Keogh, P. S., Sahinkaya, M. N., 2007, "Rotor/active Magnetic Bearing Transient Control using Wavelet Predictive Moderation," *Journal of Sound and Vibration*, 302(1), 88–103.

[36] Yousef, H. A., Elkhatib, M. E., Sebakhy, O. A., 2010, "Wavelet Network-based Motion Control of DC Motors," *Expert System with Applications*, 37(2), 1522–27.

[37] Cruz-Tolentino, J. A., Ramos-Velasco, L. E., Espejel-Rivera, M. A., 2010, "A Self-tuning of a wavelet PID controller," *20th International Conference on Electronics, Communications and Computer*, Cholula, Mexico, IEEE Press, 73–78.

[38] Sanner, R. M., Slotine, J. E., 1995, "Structurally Dynamic Wavelet Networks for the Adaptive Control of Uncertain Robotic Systems," *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, New Orleans, LA, IEEE Press, 2460–67.

[39] Hsu, C. F., Lin, C. M., Lee, T. T., 2006, "Wavelet Adaptive Backstepping Control for a Class of Nonlinear Systems," *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(5), 1175–83.

[40] Lin, C. M., Hung, K. N., Hsu, C. F., 2007, "Adaptive Neuro-Wavelet Control for Switching Power Supplies," *IEEE Transactions on Power Electronics*, 22(1), 87–95.

[41] Polycarpou, M. M., Mears, M. J., Weaver, S. E., 1997, "Adaptive Wavelet Control of Nonlinear Systems," *Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control*, San Diego, CA, IEEE Press, 3890–95.

[42] Mohammadi, S. J., Sabzeparvar, M., Karrari, M., 2010, "Aircraft Stability and Control Model using Wavelet Transforms," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 224(10), 1107–18.

[43] Kuo, S. M. and Morgan, D. R., 1996, *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, John Wiley and Sons, New York.

[44] Yang, S. M., Sheu, G. J., Liu, K. C., 2005, "Vibration Control of Composite Smart Structures by Feedforward Adaptive Filter in Digital Signal Processor," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16(9), 773–79.

[45] Guan, Y. H., Lim, T. C., Shepard, W. S., 2005, "Experimental Study on Active Vibration Control of a Gearbox System," *Journal of Sound and Vibration*, 282(3), 713–33.

[46] Peng, F. J., Gu, M., Niemann, H. J., 2003, "Sinusoidal Reference Strategy for Adaptive Feedforward Vibration Control: Numerical Simulation and Experimental Study," *Journal of Sound and Vibration*, 256(5), 1047–61.

[47] Håkansson, L., Claesson, I., Sturesson, P. O. H., 1998, "Adaptive Feedback Control of Machine-Tool Vibration based on The Filtered-x LMS Algorithm," *International Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 17(4), 199–213.

[48] Yazdanpanah, Am., Khaki-Sedigh, A., Yazdanpanah, Ar., 2005, "Adaptive control of chaos in nonlinear chaotic discrete-time systems," *International Conference on Physics and Control*, IEEE Press, 913–15.

[49] Kim, H., Adeli, H., 2004, "Hybrid Feedback-Least Mean Square Algorithm for Structural Control," *Journal of Structural Engineering*, 130(1), 120–27.

[50] Jensen, A., Cour-Harbo, A. La, 2001, *Ripples in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[51] Schniter, P., 2005, "Finite-Length Sequences and the DWT Matrix," Connexions. June 9, 2005. http://cnx.org/content/m10459/2.6/.Attallah, S., 2000, "The Wavelet Transform-Domain LMS Algorithm: A More Practical Approach," *IEEE Transactions on Circuit and Systems: -II: Analog and Digital Signal Processing*, 47(3), 209–13.

[52] Kou, S. M., Wang, M., Chen, Ke, 1992, "*Active* Noise Control System with Parallel On-Lline Error Path Modeling Algorithm," *Noise Control Engineering Journal*, 39(3), 119–27.

[53] Haykin, S., 2002, *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, Chapter 5.

[54] Chiementin, X., Kilundu, B., Dron, J. P., Dehombreux, P., Debray, K., 2010, "Effect of Cascade Methods on Vibration Defects Detection," *Journal of Vibration and Control*, 17(4), 567–77.

[55] I. Daubechies, 1998, "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLI (1988), 909–96.

[56] Strang, G., Nguyen, T, 1996, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley.

第 8 章　高速下不稳定铣削和振动的时频控制

铣削是一种高度中断的加工过程。高速铣削会导致动态不稳定和异常刀具振动带来的颤动。尽管在时域中，其相关响应仍有界。但在频域中，铣削可能形成不稳定带宽和混沌，且不经意间导致其耐受性差、表面粗糙度不合格和刀具损伤。在本章中，首次采用瞬时频率和边际谱表征非线性的、时滞的铣削模型的混沌路径过程。第 7 章阐述了对新型基于小波变换的时频控制器的研究，同时在时域和频域中稳定铣刀的非线性响应。通过对时间和频率响应施加适当的防治措施，该控制器能够有效地抑制铣削颤振，并且恢复铣削稳定性，如极低速刀具振动的极限环。这项研究同时也证实了，在确定切削稳定性边界时，可以用边际谱作为选择傅里叶频谱的依据。

8.1　铣削控制问题

配置铣削是一种切削加工，在高主轴转速下凭借具有有限切削刃的小刀具的简单配置，实现高效率切削。当浸没率较低且切割花费的时间只占主轴周期的一小部分时，结果会发生断续切削，再生效应也变得很突出，其中切割力取决于电流和延迟刀具的位置。在稳定性分析中采用一种线性高速铣削模型，Davies 等[1]表明模型的不动点会因为 Neimar-Sacker 分叉或倍周期分叉失去其稳定性。Szalai 等[2]用非线性离散模型进一步建立了两种亚临界分叉。他们也表明稳定的切割会突然变成颤动，其显著的动态影响特点是，大型刀具振动幅度或频率振荡与主轴转速不同。这种负面影响导致有害的非周期性误差，如工件表面的波纹、不精密的尺寸和工具过度磨损等[3]。

从解析和数值两方面对振动的发生进行研究。动态铣削方程式转化成在复平面上的线性映射和转移矩阵的特征值，并用来预测稳定性[1,2]。运用数值积分，通过逐渐增加轴向切削深度，直到发生不稳定，从而对稳定性进行预测[3]。然而，每种方法都存在一定的局限性。目前采用的方法是通过近似转移矩阵的特征值来确定系统的稳定界。从混沌路径的过程中，这些特征值不在复平面的单位圆内，通过该方法可以辨别分叉的类型。但是，只要省略高阶非线性项并且将解映射到正交的特征矢量上，那么，该系统响应变得模糊而且不能看作非线性系统的真实描述。在数值研究中，系统的稳定性由相应的傅里叶频谱中出现的附加频率所决定。由于无限积分中的数学求均值法，傅里叶变换生成曲解频谱和非物质的虚拟频率成分[4]。因此，由傅里叶频谱决定的稳定性必定是错误的。这表明在表征混沌路径的过程时，需要考虑到时间和频率响应[5]。先前介绍的瞬时频率（IF）[6]的概念在本章中有助于及时显现频率的从属关系——所有

的非线性响应的共同特性，包括铣削颤振。

一般情况下，现代控制理论单独在频域或时域中进行开发。当在频域中设计控制器时，将运动方程转化为传递函数。频率响应的设计方法，如波特图和根轨迹法，可用于帮助基于频域的控制器的开发[7]。当在时域中设计控制器时，其系统微分方程通过状态变量被称为状态空间模型。一旦确立了系统的可控性和可观性，便可以采用时域控制规律。任一构造的控制器仅仅只能应用在频域或时域中，并且已被证实适用于线性、稳定的系统。然而，当分叉最终达到混沌时，非线性、不稳定系统的时间响应不再具有周期性，并且出现宽带频谱。在时域中设计的控制器抑制了时间误差却无法抑制频谱发散。另外，频域中设计的控制器限制了频率带宽却无法控制时域误差。基于频域的控制器和基于时域的控制器都不足以处理分叉和混沌响应。通过测不准原理也证实了时间和频率分辨率不能同时实现。

下一节对一种高速、低浸没铣削模型进行非线性化研究，以便保留非线性系统固有的物理特性。因为不采用线性化也不采用特征矢量，所以通常采用刀具来辨别各种类型分叉的方法不再适用。作为替代方案，同时在时频域中用瞬时频率来表征系统的混沌路径的过程。第 7 章提出的新型的基于小波变换的时频控制器以及能够同时实现时频控制的基本特点也被使用。虽然目的不同，但基于小波变换的控制器的设计灵感来自于有源噪声控制[8]。而有源噪声控制有助于降低噪声，在系统发生动态不稳定时，如分叉到混沌状态，基于小波变换的控制器经配置后可减轻在时域和频域中非周期性响应的恶化。控制器最突出的特点是它对于非线性系统的适用性，该非线性系统的响应是非自治且非平稳的。通过结合自适应滤波器使这种强大的特性变为可能，以至于可以实时执行系统辨识并且可以根据不断变化的情况及时修改控制规律。第 7 章中提到了基于小波变化的时频控制器的所有组成部分的详细说明，包括在时域中的离散小波变换（DWT）、基于小波的有限冲击响应（FIR）滤波器和基于滤波-x 最小均方（FXLMS）算法。

8.2　高速低浸没铣削模型

在参考文献［2］中提出的铣削模型的一个自由度，在高速切割时控制刀具运动，如图 8.1 所示。该工具有偶数个切削刃并在恒定的角速度 Ω 下操作。其质量、阻尼系数和弹簧系数分别用 m、c 和 k 来表示。进给速度是由工件速度 V_0 决定的。铣削运动的动态方程相当于图 8.1b。

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \frac{\delta(t)}{m} F_c(h(t)) \tag{8.1}$$

式中，$x(t)$ 是刀尖垂直位置；$\omega_n = \sqrt{c/m}$ 是无阻尼自然频率；$\xi = c/(2m\omega_n)$ 是相对阻尼系数。

非线性切削力 F_c 是根据经验取工件厚度函数 $h(t)$ 的 3/4 阶导数获得的[2]，即

$$F_c(h(t)) = K\omega[h(t)]^{\frac{3}{4}} \tag{8.2}$$

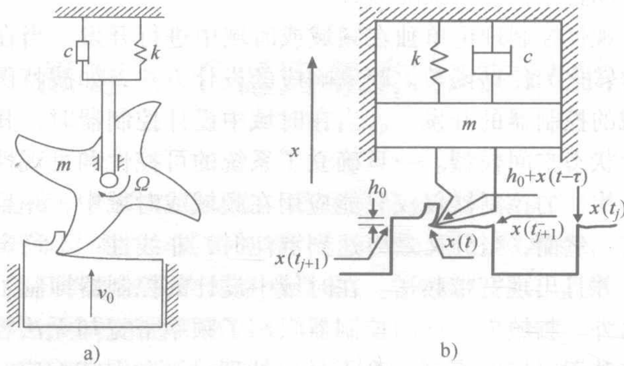


图 8.1

a) 高速铣削的配置 b) 高速铣削的机械模型

式中，K 是一个经验参数；ω 是刀片宽度。$h(t)$ 等于每个切削周期 h_0 的进给加上原先刀尖位置 $x(t-\tau)$ 再减去当前刀尖位置 $x(t)$，即

$$h(t) = h_0 + x(t-\tau) - x(t) \tag{8.3}$$

三角函数 $\delta(t)$ 定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & 若\ \exists j \in \mathbf{Z}: t_j \leqslant t < t_{j+1}^- \\ 1 & 若\ \exists j \in \mathbf{Z}: t_{j+1}^- \leqslant t < t_{j+1}^- \end{cases} \tag{8.4}$$

切削力适用于仅当实际切削刃啮合工件时的系统（$t_{j+1}^- \leqslant t < t_{j+1}$）。切削刃脱离工件后，该刀具开始自由振动，直到下一个刀刃到达（$t_j \leqslant t < t_{j+1}^-$）。正如参考文献［2］所指出的，与自由振动时间相比，切削的时间相对较少。

8.3 混沌路径和铣削不稳定性

根据参考文献［1］，刀具的质量 m 为 0.0431kg，刚度系数 k 取 1.4MN/m，阻尼系数 c 取 8.2Ns/m。时间延迟 τ 是由放置的切削刃个数（N）和主轴转速（Ω）而定义的，即 $\tau = 2\pi/N\Omega$。其中，在该研究中 $N=2$。式（8.1）中显示了研究混沌路径的过程，当主轴转速从 15000r/min 下降到 12000r/min 时，轴向切削深度（ADOC）维持在 1.0mm 。图 8.2a 给出了主轴转速为 15000r/min 时的铣削响应。幅值小于 0.1mm 的振荡是具有时间响应的稳定切削状态。然而，其傅里叶频谱如图 8.2b 所示，是一个具有多个高频分量的相对较宽的带宽，由此可说明其动态不稳定性。当主频率介于 1000 ~ 1300Hz 之间且次频在 500Hz 左右振荡时，图 8.2c 所示的瞬时频率图进一步证明了该运动是一个倍周期分叉。与图 8.2b 中的傅里叶频谱相反的是，图 8.2d 中相对应的边际谱说明带宽有限而且狭窄，从而意味着该响应是动态稳定的。随着主轴转速的降低，铣削响应经历了混沌路径的过程。

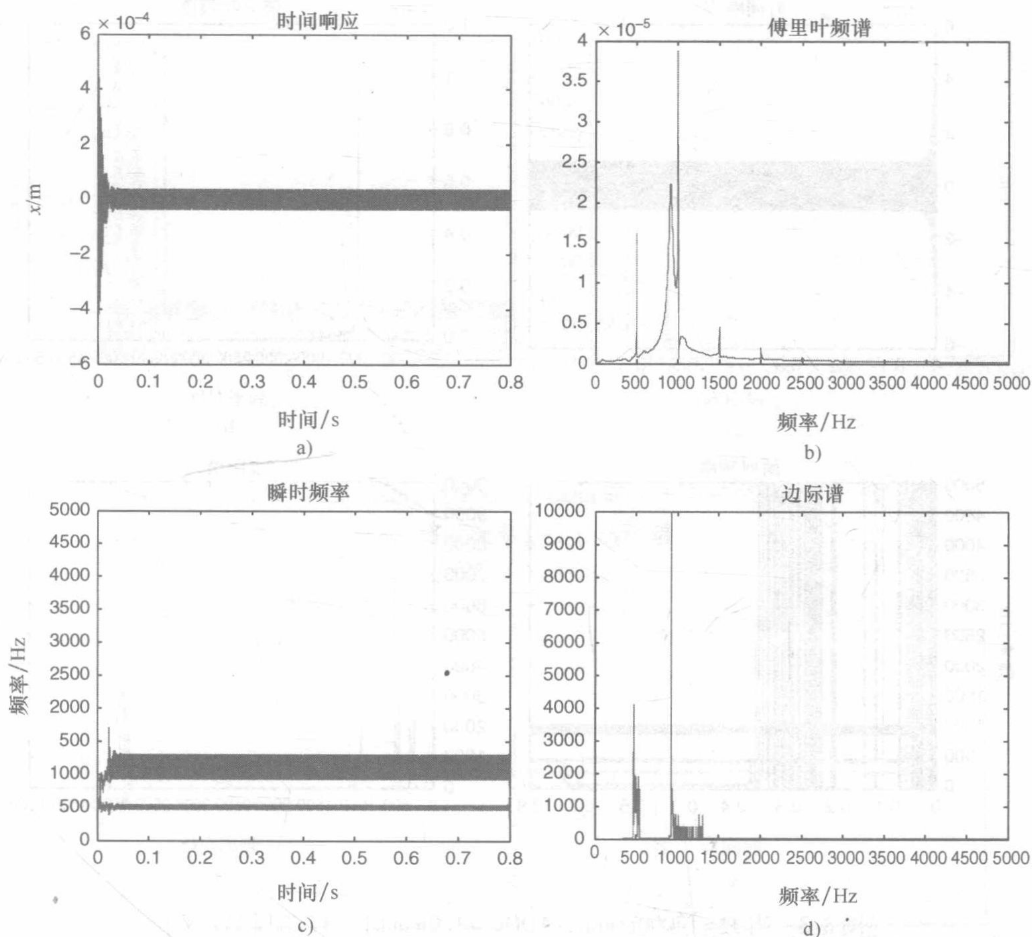


图 8.2　当 $\Omega=15000\mathrm{r/min}$、ADOC = 1.0mm 时（稳定切削条件）

（a）时间响应、（b）傅里叶频谱、（c）瞬时频率、（d）边际谱

当主轴转速为 14000r/min，新的频率分别为图 8.3c 和 d 中所标注出的 500Hz 分量的 1/2 和 1/4 值，意味着该响应向着混沌分叉。在图 8.3b 中的傅里叶频谱中未解决 $4T$ 倍周期不稳定分叉状态的问题。图 8.3b 误认为该响应不经历分叉状态。当主轴速度进一步降低到 13000r/min 时，图 8.4b 中的傅里叶频谱和先前具有较低的时间响应幅值的频谱几乎一样。然而，在图 8.4c 和图 8.4d 中相应的瞬时频率和边际谱描述了一个情况，即系统响应正处在不同时间光谱结构的状态中。随着频率带宽的不断扩大，该系统即将变为混沌状态。

图 8.5b 中的傅里叶频谱在一个相对较低的主轴转速 12000r/min 时，其结果不直观也不准确。图 8.5c 中的瞬时频率展示了主频介于 1000 ~ 3000Hz 之间的振动，这是其混沌运动的特征。这由图 8.5d 中所示的边际谱进一步证实，即由大量的频率分量构成的宽波段。由图 8.2 ~ 图 8.5 可知，尽管傅里叶频谱曲解了响应状态，但是，瞬时频率与边界频谱一起能优先解决混沌路径的过程和动态稳定性的恶化。

图 8.3 当 $\Omega=14000\mathrm{r/min}$、ADOC = 1.0mm 时（$4T$ 倍周期分叉）
（a）时间响应、（b）傅里叶频谱、（c）瞬时频率、（d）边际谱

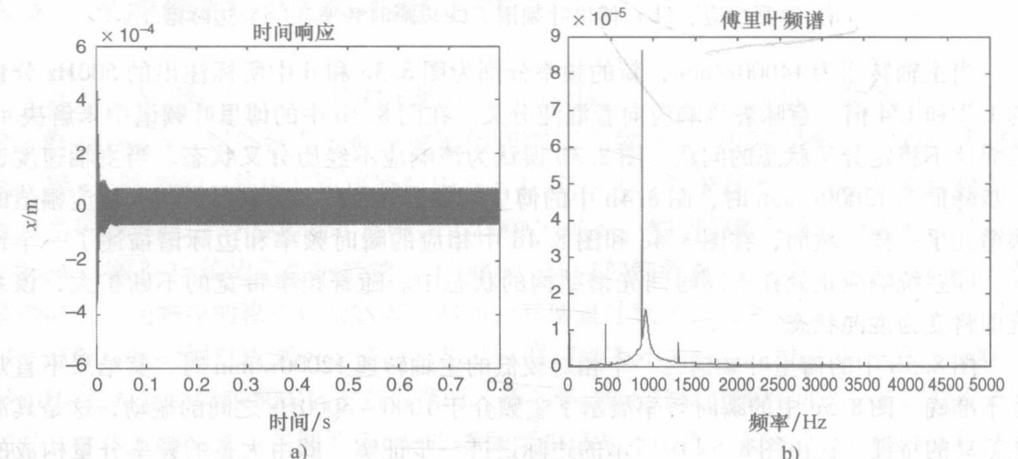


图 8.4 当 $\Omega=13000\mathrm{r/min}$、ADOC = 1.0mm 时（不稳定切削状态）
（a）时间响应、（b）傅里叶频谱

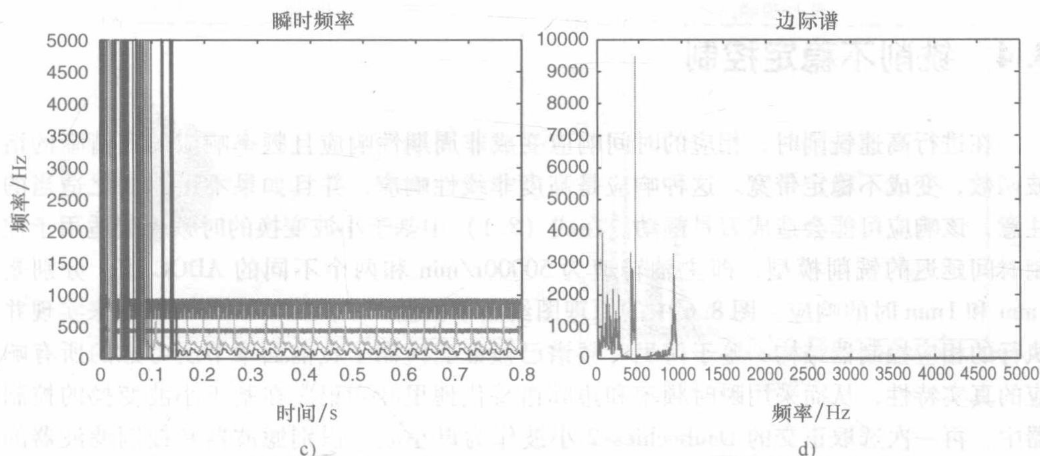
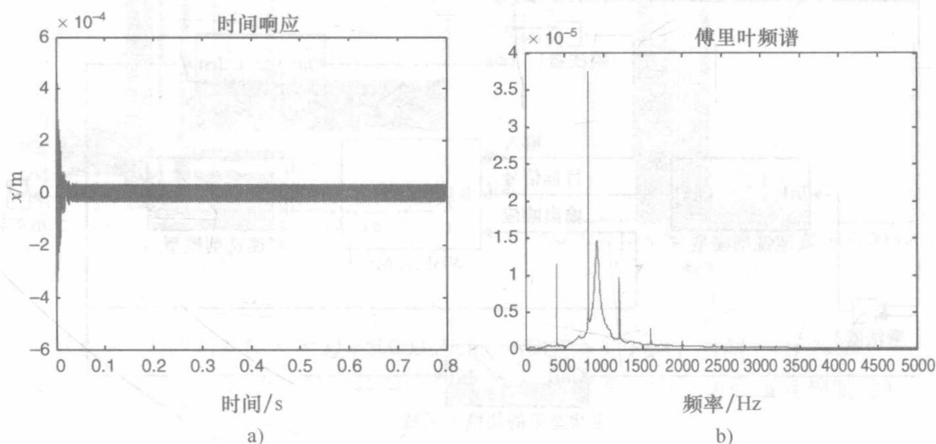


图 8.4　当 $\Omega = 13000$r/min、ADOC = 1.0mm 时（不稳定切削状态）（续）

（c）瞬时频率、（d）边际谱



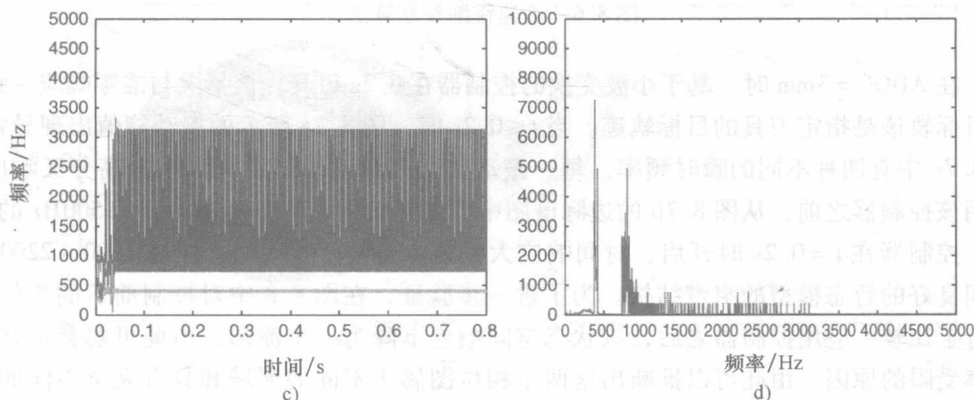


图 8.5　当 $\Omega = 12000$r/min、ADOC = 1.0mm 时（混沌运动）

（a）时间响应、（b）傅里叶频谱、（c）瞬时频率、（d）边际谱

8.4　铣削不稳定控制

在进行高速铣削时，相应的时间响应变成非周期性响应且频率响应偏离清晰的谐波函数，变成不稳定带宽。这种响应是高度非线性响应，并且如果不迅速加之适当的注意，该响应可能会造成刀具颤动。在式（8.1）中基于小波变换的时频控制适用于控制时间延迟的铣削模型，即主轴转速为50000r/min和两个不同的ADOC值，分别是3mm和1mm时的响应。图8.6中的原理图给出了根据MATLAB Simulink算法来实现并执行的相应控制器结构。鉴于傅里叶频谱已被证实模糊了在前面章节所考虑的所有响应的真实特性，从而采用瞬时频率和边际谱替代傅里叶频谱。在基于小波变换的控制器中，再一次选取正交的Daubechies-2小波作为母小波。识别滤波器和控制滤波器的滤波器长度都是256。

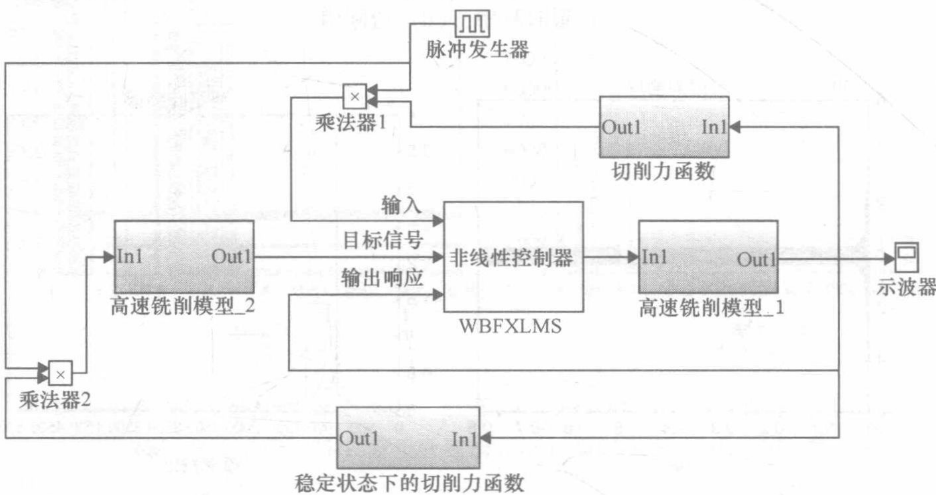
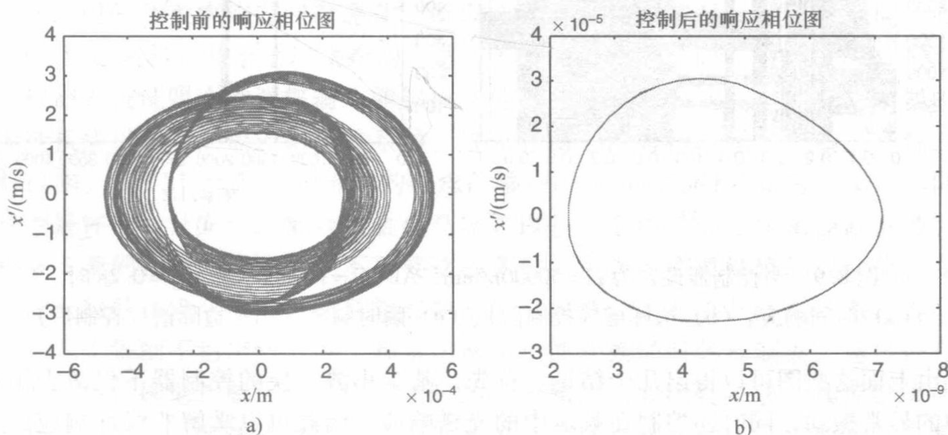


图8.6　高速铣削控制算法

在ADOC = 3mm时，基于小波变换的控制器在0.2s打开，该情况与准零响应一致，该目标轨迹是指定刀具的目标轨迹。当$t \leqslant 0.2$s时，图8.7a所示的振动幅值出现异常。图8.7c中有四种不同的瞬时频率，每一振动伴随着瞬时模型结构典型的高分叉响应。应用该控制器之前，从图8.7b的边际谱图中可以看出一个频率范围为0～1500Hz的频谱。控制器在$t = 0.2$s时开启，时间响应大大减少且频率响应是一个在1400～2200Hz之间良好的暂态模型的窄带结构。为了进一步验证，在图8.8中对控制前后的相位图进行了比较。应用控制器之后，该状态空间响应下降为一个流形，由此可解释带宽和频率受限的原因。由此可以推断出这两个相位图属于不同的流域和具有完全不同的几何结构，控制器改变了系统的潜在特性，有效地制止了进一步恶化，并且确保了主轴转速处于50000r/min时的动态稳定性。

图 8.7　当控制器设置为 $\Omega=50000\mathrm{r/min}$、ADOC = 3.0mm、时间 $t=0.2\mathrm{s}$ 时
(a) 时间响应、(b) 边际谱 (控制前)、(c) 瞬时频率、(d) 边际谱 (控制后)



a)　　　　b)

图　8.8

a) 无控制的响应相位图　b) 控制后的响应相位图

下一个例子研究的是 ADOC 设置为 1mm 时的小型铣削系统。因为时间响应的振幅仍然很小，所以运动近似为一种稳定的切削操作，如图 8.9 所示。然而，在瞬时频率的图中显示了明显的时域模型振动，表现出复杂的非线性振动，这是刀具颤振的前兆。控制器在 0.2s 启动后，时间响应和边际谱都被有效地抑制了。图 8.10 将受控的和不受控的系统响应相位图放在一起进行比较。由两个流形可以看出，该运动在控制器启动前后都是稳定的。然而，尽管控制器打开后运动相位图仍然在同一流域内，但是从图 8.10b 可以看出，其轨迹的刻度和大小明显减少 100 倍。

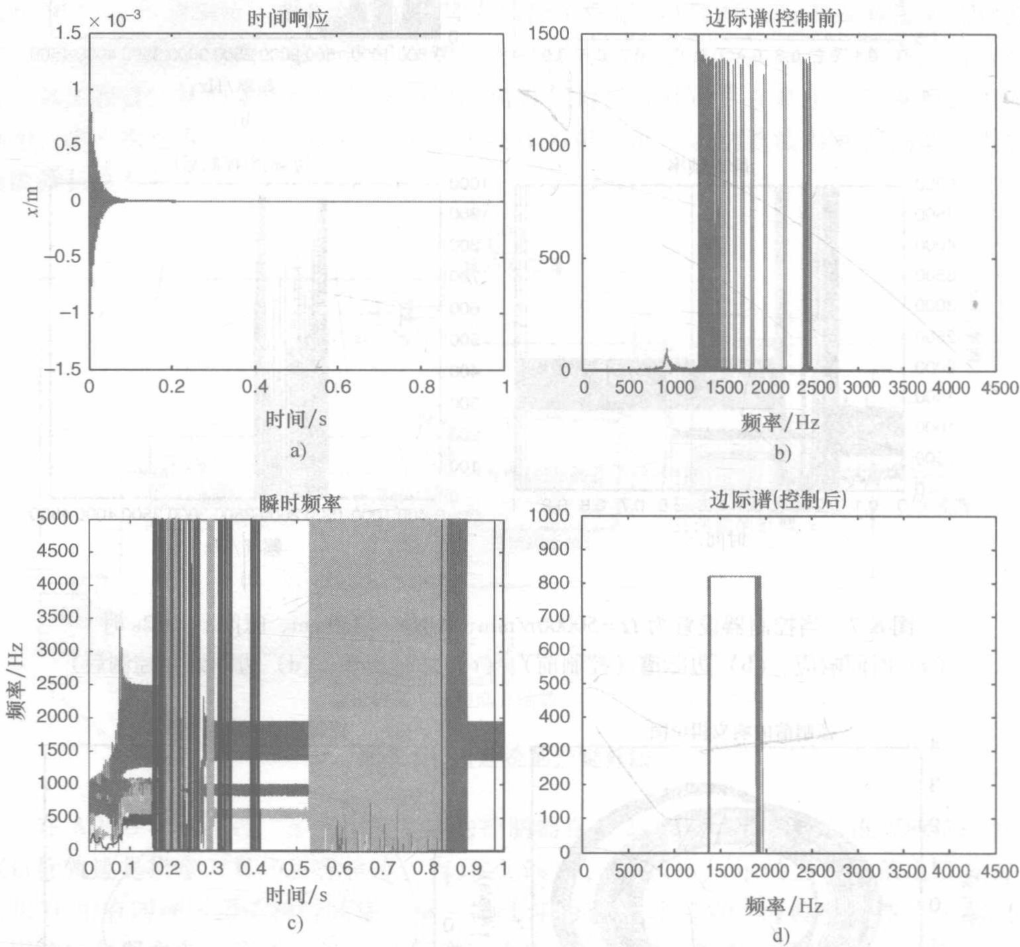


图 8.9 当控制器设置为 $\Omega=50000\mathrm{r/min}$、ADOC = 1.0mm、时间 $t=0.2\mathrm{s}$ 时
(a) 时间响应、(b) 边际谱（控制前）、(c) 瞬时频率、(d) 边际谱（控制后）

由上面这些图可以得出几个结论。首先，基于小波变换的控制器不仅减少了在时域中的异常振动，同时还控制在频域中的光谱响应。因此可以缓解非线性响应的进一步恶化。其次，在采用了控制器后铣刀运动急剧转换，作为在时域中的低幅振荡，其表现为一个在状态空间中减小的流形。即使控制目标设置为零，且得到的时域误差很

小且满足条件，但是光谱响应不仅包含一个单一的频率。其频谱也是各不相同的，但是，当前频谱被严格地限制在有限的带宽内。

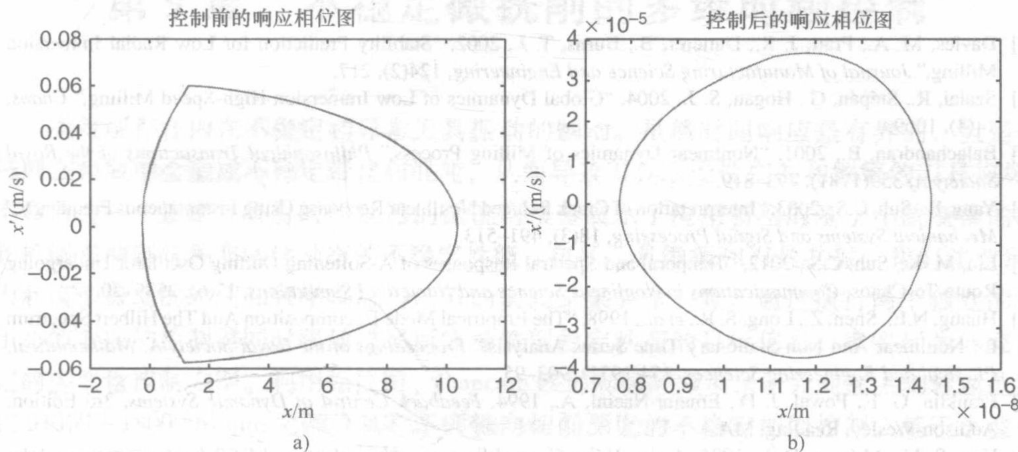


图　8.10

a）无受控制的响应相位图　b）控制后的响应相位图

8.5　小结

铣刀动态结果表明由于再生效应的影响，使用瞬时频率代替傅里叶频谱达到瞬时的且非线性的特性。铣削响应被视为对加工条件和外部扰动具有高度灵敏性，在分叉到混沌的过程中易恶化。当系统不稳定时，铣削的时间响应不再是周期性响应，频率响应变成宽频的，可能导致刀具颤振和刀具损伤。瞬时频率的边际频谱，被认为比傅里叶频谱更适合用来定义高频铣削操作的稳定性边界。由于混沌路径的过程中，系统的时间和频率响应同时恶化，所以必须同时控制其时间和频率响应。应用DWT的时频控制器、基于小波变换的自适应FIR滤波器，它们的物理特性为FXLMS算法，控制器被证明通过调整输入能够成功地抑制分叉和混沌响应。在控制器中离散小波变换集成能有效地控制小波系数，进而有助于同时在时域和频域上对铣刀响应进行控制。从FXLMS算法中提取的理念能够进行实时的系统辨识和控制。不同于常规控制规律的设计方法，常规方法总是需要以数学上明确的方法来控制系统，而基于小波变换的控制器的建立就不需要这些条件。由于不需要精确的线性化，受控的系统固有特性被完全保留，并且能够在不失真的情况下解决其潜在动态特性。本章研究的几个铣削不稳定性的例子都采用基于小波变换的时频控制器，通过这几个例子表明，要正确地控制一个响应是瞬时的且不稳定的非线性系统，其控制规律必须具有一定的特性，包括能够实时地辨识系统，并且能够同时在时域和频域上采取缓和的特性。

参考文献

[1] Davies, M. A., Pratt, J. R., Dutterer, B., Burns, T. J., 2002, "Stability Prediction for Low Radial Immersion Milling," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 124(2), 217.

[2] Szalai, R., Stépán, G., Hogan, S. J., 2004, "Global Dynamics of Low Immersion High-Speed Milling," *Chaos*, 14(4), 1069.

[3] Balachandran, B., 2001, "Nonlinear Dynamics of Milling Process," *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 359(1781), 793–819.

[4] Yang, B., Suh, C.S., 2003, "Interpretation of Crack Induced Nonlinear Response Using Instantaneous Frequency," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(3), 491–513.

[5] Liu, M.-K., Suh, C.S., 2012, "Temporal and Spectral Responses of A Softening Duffing Oscillator Undergoing Route-To-Chaos, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 17(6), 2539–50.

[6] Huang, N.E., Shen, Z., Long, S. R., *et al.*, 1998, "The Empirical Mode Decomposition And The Hilbert Spectrum for Nonlinear And Non-Stationary Time Series Analysis," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1971), 903–95.

[7] Franklin, G. F., Powel, J. D., Emami-Naeini, A., 1994, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3rd Edition, Addison-Wesley, Reading, MA.

[8] Kuo, S. M., Morgan, D.R., 1996, *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, John Wiley and Sons, New York.

第9章 不稳定微铣削的多维时频控制

微铣削存在内在不稳定和异常刀具振动的颤动。虽然时间响应是有界的，但是微铣削在频域中会造成不稳定带宽和混沌，从而导致刀具耐受性变差和频繁的刀具损坏。本章通过一个多维且具有时间延迟的微铣削模型展示了应用新型的基于小波变换的时频控制来抑制各种非线性动态的不稳定性能，包括刀具颤振和刀具共振。我们注意到，力和模型振动的时间和频率响应与已有的实验结果完全一致。通过执行两个独立的基于小波变换的控制器同时跟随描述所需微铣削稳定状态的目标信号，来实现为研究制定的多变量控制方案。利用相位图、Poincaré 映射和瞬时频率来研究高速主轴转速范围在 63000 ~ 180000r/min 之间且具有不同轴向切削深度的不稳定切削控制。基于小波变换的时频控制方案有效地恢复了动态不稳定性，包括抵制流形和混沌响应返回到一个吸引极限环或降低振动幅值和频率响应的周期运动。动态不稳定切削过程中的力的大小也降低到稳定切削的范围内。

9.1 微铣削控制问题

因为组件的大小不断减少并且需要有更多功能，微铣削成为许多行业技术进步的关键，对于从种类繁多的材料中生产复杂的三维产品至关重要。然而，微铣削受制于不可预测的刀具使用寿命和刀具过早失灵，这些可以毁坏一个工件，而且需要对昂贵、低效的产品进行检验和重置[1,2]。因此，这会直接影响流程效率的提高。切屑堵塞、疲劳和过度应激相关的失灵被认定为三种常见的微铣刀破坏机理[1]。当压力低于耐力极限但高于正常的操作水平时，该刀具不会立刻失灵[1]。然而，当刀具旋转引起刀具主轴应变分布不断变化时，施加在轴上的压力将反复变化，从而诱发疲劳。具有高频或多个频率成分的振动会增加应变分布变化的速率，在加速过程中必然会造成疲劳失灵。当切削力突然增加时，过度应激相关损坏发生，表明动态不稳定切削是由过度振动幅度引起的。此外，过度的机械振动（颤振）影响工件表面粗糙度和耐受性，并导致更大的切削力，这是衡量刀具性能的关键指标[3]。因此，微铣削加工性能和故障直接受刀具动态响应的影响，控制动态不稳定性对于提高微铣削加工效率十分重要。

物理模型对于表征动态不稳定、控制算法的开发和测试、提供设计实证研究所需的自知力是很重要的。微铣削不能直接采用该方法进行宏铣削的建模，这是因为在工作中有不同切削力机制的缘故，如材料犁沟增加的影响。当切屑厚度太小时，不会形成切屑且材料在刀具作用下会形成犁沟[4]。由于刀尖半径与增加的进给率的比率缘故，这种现象在微铣削加工中更为明显。微铣削加工是一个高度非线性的过程，这要归功于这些额外的非线性特征和普遍采用的高主轴转速。在参考文献［5］中通过未打磨的

切削厚度模型与有限元正交切削模型相结合，来解决微铣削颤振的问题。利用统计方差生产稳定裂片，颤振定义为大于1μm的统计方差。然而，参考文献［5］中提到的未打磨的切削厚度模型由于其犁沟机理而未能考虑材料的弹性恢复，因此影响了它的真实性。微铣削稳定裂片由参考文献［6，7］提出，与实验数据相比该稳定裂片具有有限精度，这表明该系统的动态特性对于结果的稳定性具有重大影响。稳定裂片通过线性生成，这会模糊微铣削加工中重要过程的非线性特性。参考文献［6，7］中的实验数据显示高频分量和多颤振频率是非线性过程的特性。过程建模和过程控制分析应保留其固有的非线性因素来有效地解决动态不稳定性。对微铣削过程建立非线性强迫机制模型的有效方法是通过建立滑移线场模型。参考文献［8］显示在预测切削力等级时，参考文献［9］中开发的综合滑移线场模型优于有限元模型。参考文献［10］开发的综合滑移线场模型是对在切削刃附近切削过程的建模。参考文献［11，12］中提到早期的滑移线场模型可预测剪切力和犁沟力，并且在参考文献［13］中力的机理方程得到改进。以上回顾的研究侧重于力机制的发展来预测切削力并且不研究动态不稳定性。参考文献［14］采用的是参考文献［13］提出的滑移线场力机制，证明了材料弹性恢复在切屑厚度计算、实际切削前角和刀具螺旋角中用于数值研究其动态响应。该模型获取了微铣削加工中所有重要的非线性特性，并在这次的科学研究中采纳，用来探讨非线性微铣削控制。

在控制微铣削加工中存在几个问题。除了能将微加工从宏观加工中区别出来的不同切削动态，微型化端铣刀的性能受振动和过大外力的影响很大。噪声和力传感器带宽不足的影响是由于高转速造成的，使得其难以测量切削力[8]。不同于宏观加工，研究刀具刀尖动态的冲击锤试验在微型结构中并不适用，这是由于微型刀具的疲劳性质造成的，并且由于其尺寸和质量，加速传感器不能有效地附加在刀具上，这将会影响到整体的动态性能[15]。响应耦合（RC）用于精确地结合使用非接触式传感器刀具的刀尖和其余部分，以此来估计微观结构刀具的动态[16]。然而，微加工控制器的发展仍然遭受小型化微结构的挑战。只有几篇研究论文涉及微加工的控制。参考文献［17］中遵循指令整形法来减少在微铣削中的追踪误差。它正确地选择直流电动机在精密的线性阶段的加速度模板，以抵消来自刀具高速运动的内力引起的振动。通过交叉耦合减少了轮廓误差，即建立实时的轮廓误差模型并将误差矫正信号返回到每个电动机轴上[18]。安装压电叠层执行器来直接控制刀具主轴和微铣削机械工件之间的相对运动，而有源振动控制（ACV）是用来抑制刀尖点的振动[19]。正如压电执行器的响应时间不能赶上主轴的高旋转速度，所以该方法只适用于低速微加工。

综上所述，可以推断出在微加工中没有有效的方法来控制颤振。一个关键因素是控制高度非线性的切削力。切削力不能超过刀具的临界极限，该临界极限会造成刀具突然失灵。这就限制了切削负载，从而能够获得材料去除率。那么，更高的主轴转速要求在增加材料去除率的过程中不会增加切削负载。然而，动力机制的非线性在更高的主轴转速下变得更加突出，导致增加的励磁频率产生动态不稳定。另一个因素是控制方法必须适应切削过程的不确定性和变化的动态。然而，实际中切割

不稳定包括在时域和频域上的恶化，该恶化是由于微铣削过程中高度非线性性质所造成的。

本章解决了上述问题，首先对一个非线性微铣削模型给出详细的描述，该模型可以获取切削过程的固有特性。针对前面章节中所讨论的基于小波变换的时频控制器的设计，开发一种多变量非线性控制方案，以便适当缓解微铣削加工的不稳定性。

9.2　非线性微铣削模型

微铣削加工模型的控制考虑其过程中突出的非线性特性[14]。该模型的强迫机制采用参考文献［13］中出现的滑移线力模型，通过考虑死区金属罩和在刀面上添加额外的滑移线来扩展参考文献［12］中提到的模型。因为这种材料需要时间来恢复并且使用的进给量大于刀尖半径，参考文献［14］中的模型忽略了这种额外的滑移线，假定这种额外的滑移线对切削力的影响微乎其微。当切屑厚度大于临界切屑厚度时，便假设剪切力和犁入力都出现。在切割和推力方向上的剪切力和犁入力如参考文献［12，13，14］所给出的公式，即

$$\mathrm{d}F_{sc} = \tau \mathrm{d}a[(\cos\varphi_S + a_\theta \sin\varphi_S) l_S + (\cos(2\eta_2)\sin\alpha_e + a_2\cos\alpha_e) l_b] \tag{9.1}$$

$$\mathrm{d}F_{st} = \tau \mathrm{d}a[(a_\theta \cos\varphi_S - \sin\varphi_S) l_S + (\cos(2\eta_2)\cos\alpha_e - a_2\sin\alpha_e) l_b] \tag{9.2}$$

$$\mathrm{d}F_{pc} = \tau \mathrm{d}a[(\cos(2\eta_1)\cos\psi + a_1\sin\psi) l_b] \tag{9.3}$$

$$\mathrm{d}F_{pt} = \tau \mathrm{d}a[(a_1\cos\psi - \cos(2\eta_1)\sin\psi) l_b] \tag{9.4}$$

式中，τ 是材料剪切流动应力；$\mathrm{d}a$ 是切割轴向深度；φ_S 是流屑角；α_e 是有效前角；l_S、l_b、a_θ、a_1、a_2、η_1、η_2 和 ψ 是在参考文献［13，20］中定义的滑移线场变量如图 9.1 所示。式（9.1）~式（9.4）中的力学方程和相关变量都是瞬时切屑厚度 $tc(t)$ 的所有函数。在微铣削中，当 $tc(t)$ 小于最小切屑厚度 $tc_{\min}$ 时，只有存在犁入力，并且当刀具跳出切割范围时，系统中没有力的作用。因此，考虑的三种力的情况如下：

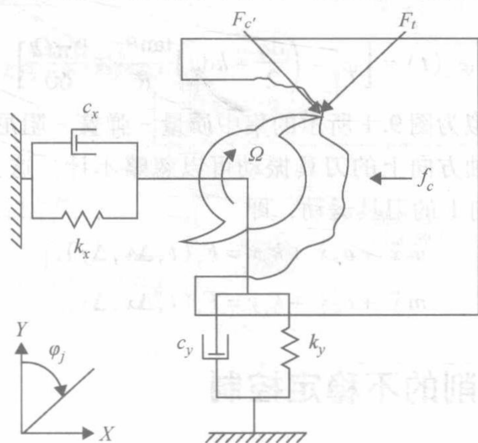


图 9.1　微型刀具的 2D 集总质量、弹簧、阻尼器模型

情况Ⅰ：$tc(t) > tc_{\min}\begin{cases}\mathrm{d}F_t = \mathrm{d}F_{st} + \mathrm{d}F_{pt}\\ \mathrm{d}F_c = \mathrm{d}F_{sc} + \mathrm{d}F_{pc}\end{cases}$

情况Ⅱ：$0 < tc(t) < tc_{\min}\begin{cases}\mathrm{d}F_t = \mathrm{d}F_{pt}\\ \mathrm{d}F_c = \mathrm{d}F_{pc}\end{cases}$

情况Ⅲ：$tc(t) < 0\begin{cases}\mathrm{d}F_t = 0\\ \mathrm{d}F_c = 0\end{cases}$

由这三种情况表明准确地确定 $tc(t)$ 对于如实地实现系统的作用力并从而产生动力是十分重要的。该模型采用的方法考虑到槽刨现象和刀具跳出切割范围时的弹性恢复。式（9.5）~式（9.7）用于确定 $tc(t)$，其下标 j 指的是微铣削的齿 1 和齿 2，fc 是进给量，N 是齿数，Ω 是主轴转速，$\Delta x = x(t) - x(t-\delta)$，$\Delta y = y(t) - y(t-\delta)$，时间延迟 $\delta = 60/(N\Omega)$。

$$tc_j(t-\delta) > tc_{\min}: tc_j(t) = fc \cdot \sin\varphi_j(t) + \Delta x\sin\varphi_j(t) + \Delta y\cos\varphi_j(t) \tag{9.5}$$

$$0 < tc_j(t-\delta) < tc_{\min}: tc_j(t) = fc \cdot \sin\varphi_j(t) + \Delta x\sin\varphi_j(t) + \Delta y\cos\varphi_j(t) + p_e \cdot tc_j(t-\delta) \tag{9.6}$$

$$tc_j(t-\delta) < 0: tc_j(t) = fc \cdot \sin\varphi_j(t) + \Delta x\sin\varphi_j(t) + \Delta y\cos\varphi_j(t) + tc_j(t-\delta) \tag{9.7}$$

该模型也可解释有效的前角和螺旋角。螺旋角的推导得出下列力分量的方程：

$$F_x = -F_t\sin\varphi_j(t) + F'_c\cos\varphi_j(t) \tag{9.8}$$

$$F_y = -F_t\cos\varphi_j(t) - F'_c\sin\varphi_j(t) \tag{9.9}$$

$$F_z = F_c\sin\theta_h \tag{9.10}$$

式中，θ_h是螺旋角，$F'_c = F_c\cos\theta_h$。

为了说明螺旋角，还假设该刀具可以分解成轴向分量。因此，每一齿和轴向分量的浸入角 φ_j（t）如图 9.1 所示，必须确定知道每一齿和轴向分量的浸入角是否在工件上，从而促使系统整体受力。式（9.11）中给出的方程可得出每一齿 j 和轴向分量 k 的浸入角 φ：

$$\varphi_{jk}(t) = \left[\varphi_{ij} - \left(\frac{\mathrm{d}a}{2} + k\mathrm{d}a\right)\frac{\tan\theta_h}{R} + \frac{2\pi\Omega t}{60}\right] \tag{9.11}$$

假定刀具可以被模拟为图 9.1 所示的集中质量 - 弹簧 - 阻尼系统。还假定由于 z 方向上非常高的刚度，主轴方向上的刀具振动可以忽略不计。这会导致两个耦合运动方程，来控制 x 和 y 轴方向上的刀具运动，即

$$m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = F_x(t, \Delta x, \Delta y) \tag{9.12}$$

$$m\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y = F_y(t, \Delta x, \Delta y) \tag{9.13}$$

9.3 多变量微铣削的不稳定控制

基于小波变换的时频非线性控制规律已被证明可解决动态不稳定所固有的基本特征，包括分叉和混沌。该控制规律与现代控制理论不同，现代控制理论致力于消除时

域误差，该控制规律同时抑制了时间响应和频率响应的恶化。系统响应是通过最小均方（LMS）自适应滤波器来调整控制的，从而迫使该系统跟随一个目标信号，该系统响应是动态恶化之前的稳定状态响应。因为不需要线性化和解析解，所以非线性响应所有的真实特性都被保留下来。控制方案利用系统响应相关的离散小波变换（DWT）系数来实现时域和频域的联合控制。控制理论应用于多维微铣削模型，如式（9.1）~式（9.13）所示。按照图 9.2 所示的多变量控制结构，x 和 y 方向上的运动用分力来确定，分力是由在式（9.5）~式（9.7）中的进给和瞬时切屑厚度定义的。图 9.2b 显示了作为一种 MATLAB Simulink 算法的控制配置的实现。将两个独立的非线性控制器放置在微铣削模型每个方向的前面，以缓解激振分力，从而实现多变量控制。这两种控制器操作是并行的，并且使用了不同的参数。

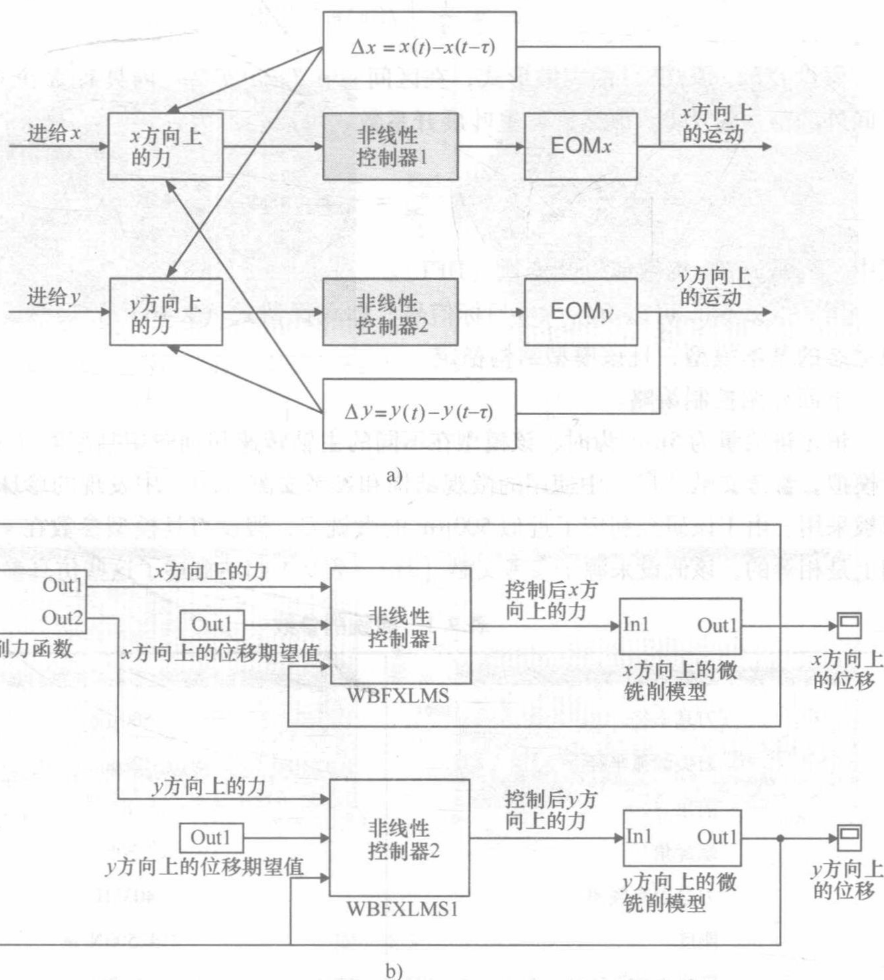


图 9.2

a）多变量控制配置　b）多变量控制实现算法

目标信号的制定采用了一种理想的微铣削响应状态下被截断的傅里叶级数。理想状态是通过稳定的振幅和有界的频率响应来定义的，包括将其和不稳定状态，如分叉、混沌区分开的基本模式。当控制器启用后，系统将恢复到由目标信号定义的所需的稳定状态。接下来对目标信号的建立做简要回顾，其次是下一章节中的应用实例。傅里叶级数提供了一种提取时间信号的替代方法，即通过使用不同频率的谐波函数来提取时间信号。假设f是定义在［$-T/2$，$T/2$］区间内的T周期函数，那么其对应的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi i n/T} \tag{9.14}$$

和

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n/T}\mathrm{d}x \tag{9.15}$$

假设$f(k)$是$f(x)$的离散形式，在区间［$-T/2$，$T/2$］内具有N个点。$f(k)$在区间外的值假设为0。那么，傅里叶展开系数c_n可以表示为

$$c_n = \frac{1}{T}\frac{T}{N}\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(k)\mathrm{e}^{\frac{-2\pi i n k}{N}} = \frac{1}{N}F_n, n = -\frac{N}{2}+1,\cdots,\frac{N}{2} \tag{9.16}$$

式中，F_n是$f(k)$离散傅里叶变换（DFT）。

用式（9.14）可以重新产生目标信号，即只保留式（9.16）的频率成分来代表理想动态的基本模型，且该模型结构稳定。

下面介绍控制策略。

恒定进给量为5μm/齿时，该模型在不同的主轴转速和轴向切割深度（ADOC）下进行模拟。参考文献［13］中使用的微观结构和参考文献［20］中发现的珍珠岩材料参数都被采用。由于该研究利用了近似500μm的微铣刀，假设刀具模型参数在x方向和y方向上是相等的，该假设来源于参考文献［21］。表9.1归纳概述了这些仿真参数。

表9.1　微铣削参数

参数	值
齿数	2
刀具半径	500μm
刀尖圆弧半径	2μm
前角	8°
螺旋角	30°
刀具固有频率	4035Hz
刚度	2142500N/m
阻尼系数	0.016

在主轴转速为63000r/min并且轴向切割深度为100μm时，可观察到一个不稳定响应。在这些切削条件下，使用瞬时频率的时域和频域响应都出现不规则性。x和y运动

的时间响应和瞬时频率结果如图 9.3 所示。可以看出刀具的固有频率为 4035Hz，刀刃的通过频率为 2100Hz。如图 9.3 所示，在瞬时频率图中刀刃通过频率出现高分叉，其中包含低于刀刃的通过频率的多频率模式。当主轴转速减少到 60000r/min，ADOC 保持在 100μm 时，刀具响应是稳定的，如图 9.4 所示。在较低振幅下振动响应有所改善且瞬时频率表现出稳定的动态响应，其中包括 4035Hz 的刀具固有频率和 2000Hz 的刀刃的通过频率。该目的是提高该过程的动态稳定性。因此，在 63000r/min，ADOC 为 100μm（见图 9.3）时的不稳定响应是可行的，而且比在 60000r/min，ADOC 为 100μm（见图 9.4）时的稳定响应更好。控制器的目标信号是基于特定的稳定切削的特点而建立的。目标信号必须包含过程的物理意义模式和可接受的振幅。那么，保留具有物理意义的频率而舍弃不良频率分量。

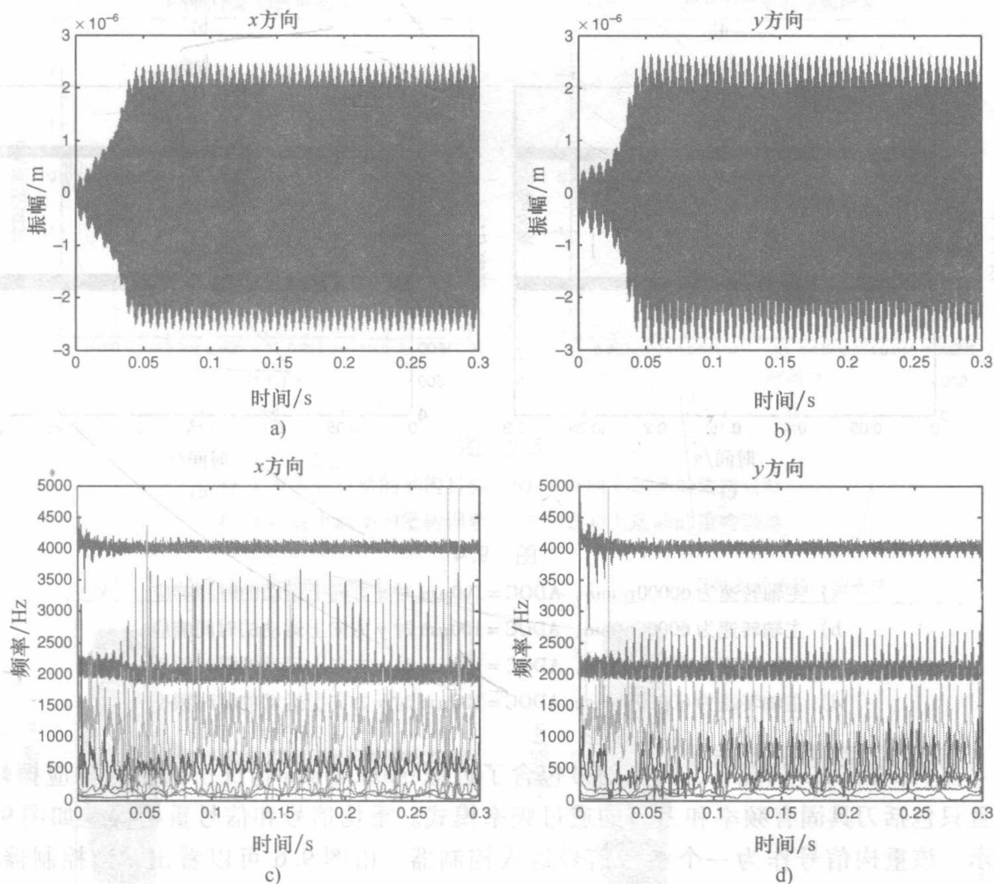


图　9.3

a）主轴转速为 63000r/min，ADOC = 100μm 时 x 方向上运动的时间响应

b）主轴转速为 63000r/min，ADOC = 100μm 时 y 方向上运动的时间响应

c）主轴转速为 63000r/min，ADOC = 100μm 时 x 方向上运动的瞬时频率

d）主轴转速为 63000r/min，ADOC = 100μm 时 y 方向上运动的瞬时频率

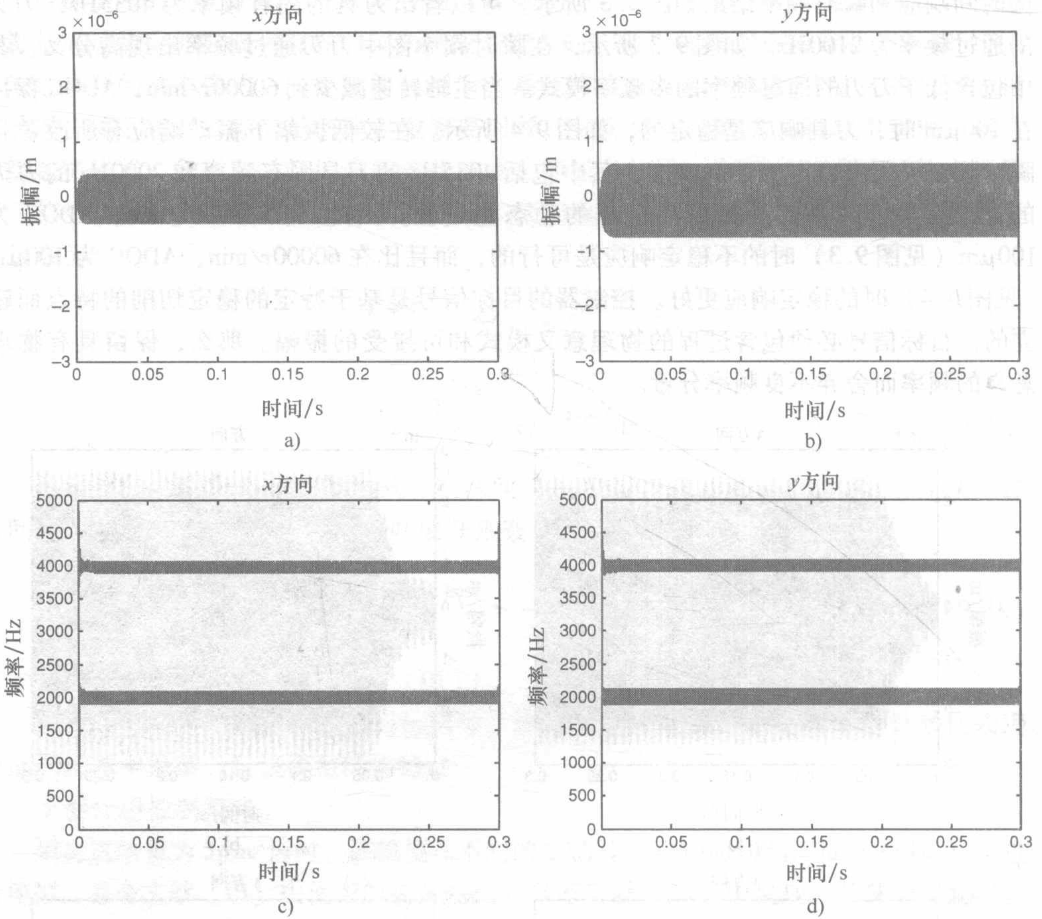


图 9.4

a）主轴转速为60000r/min，ADOC = 100μm 时 x 方向上运动的时间响应

b）主轴转速为60000r/min，ADOC = 100μm 时 y 方向上运动的时间响应

c）主轴转速为60000r/min，ADOC = 100μm 时 x 方向上运动的瞬时频率

d）主轴转速为60000r/min，ADOC = 100μm 时 y 方向上运动的瞬时频率

在63000r/min 情况下，目标信号包含了近似60000r/min 情况下的稳定响应振幅，并且只包括刀具固有频率和刀刃的通过频率模式。重构信号和信号重构误差如图 9.5 所示。该重构信号作为一个参考信号送入控制器。由图 9.6 可以看出，当控制器在 0.2s 时开启，在63000r/min 下的不稳定切削具有受控振动和频率响应。振幅降低到近似稳定切割的水平，工件的公差和表面质量得到显著提高。图 9.6 中的瞬时频率图也证明了个别模式下的改良频率响应当前是有界的并且在一个窄带宽的范围内。图 9.7 中的相位图和 Poincaré 映射显示一旦控制器开启，运动的动态会得到改善。不受控系统的相位图和 Poincaré 映射显示出分形极限环，而受控系统的相位图和 Poincaré 映射验证了振幅降低并且具有有限数量的良好频率分量的准周期运动。

图　9.5

a）x 方向上运动的重构目标　b）y 方向上运动的重构目标

c）x 方向上运动的重构误差　d）y 方向上运动的重构误差

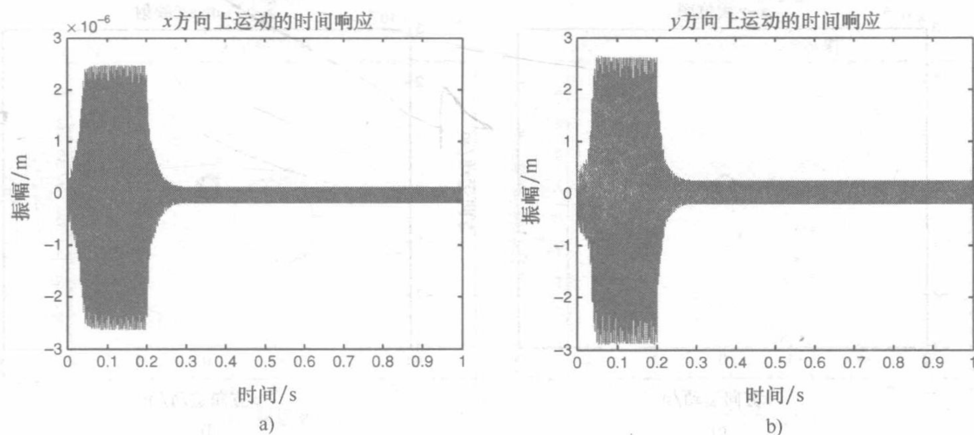


图　9.6

a）主轴转速为 63000r/min，ADOC = 100μm 时，x 方向上运动的时间响应

b）主轴转速为 63000r/min，ADOC = 100μm 时，y 方向上运动的时间响应

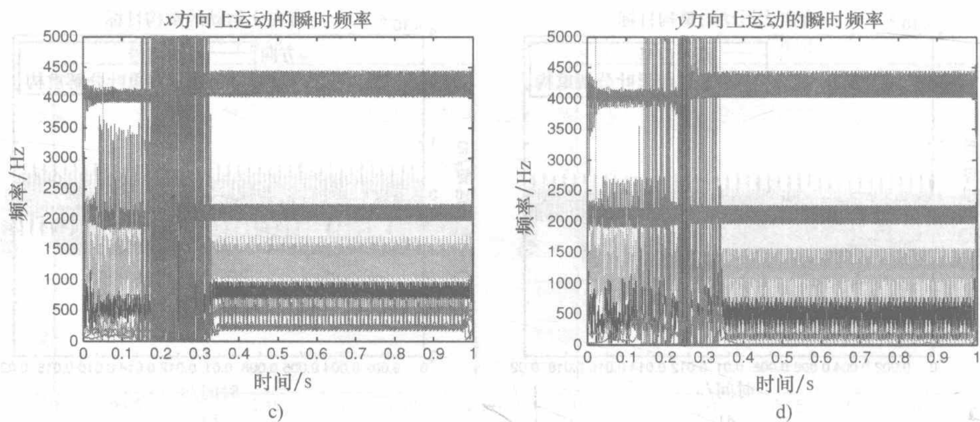


图 9.6（续）

c）主轴转速为63000r/min，ADOC = 100μm 时，x 方向上运动的瞬时频率

d）主轴转速为63000r/min，ADOC = 100μm 时，y 方向上运动的瞬时频率

x–y 相位图

x–y Poincaré映射

x–y 相位图

x–y Poincaré映射

图 9.7

a）受控前，x-y 相位图　b）受控前 x-y，Poincaré 映射　c）受控后，当主轴转速达到63000r/min，ADOC = 100μm 时，x-y 相位图　d）受控后，当主轴转速达到63000r/min，ADOC = 100μm 时，x-y Poincaré 映射

9.4 微铣削的不稳定控制

借助相位图、Poincaré 映射、时间响应、瞬时频率和切削力来研究在不同主轴转速和 ADOC 下的微铣削模型控制。图 9.8 给出了主轴转速在 75000r/min，ADOC = 40μm 时的相位图和 Poincaré 映射。在控制器启动之前，Poincaré 映射的散射如图 9.8b 所示，结果表明尽管该时间响应是有界的，但是还是一种宽频的、混乱的响应。受控后，图 9.8c 中的相位图变成具有 1/4 振幅的极限环。Poincaré 映射如图 9.8d 所示。可以看出是具有有限数量的相应频率的周期运动。图 9.9 显示了控制铣削加工过程的时间响应和瞬时频率。该控制器在 0.1s 时开启，采用相同的主轴转速，较小的 ADOC 值，取 ADOC = 30μm 时的响应来设计目标信号。0.1s 之前，无控制的系统响应在 x 和 y 方向上具有不规则的时间响应振幅和宽带的不稳定频率。一旦控制器在 0.1s 时开启，该时间响应的振幅就会减少并且瞬时频率被抑制在具有有限个频谱分量的窄带宽频谱中。如图 9.10 所示，受控之后，两个方向上的切削力幅值略有减少。控制器将力的幅值维持在特定切屑负载的稳定切削

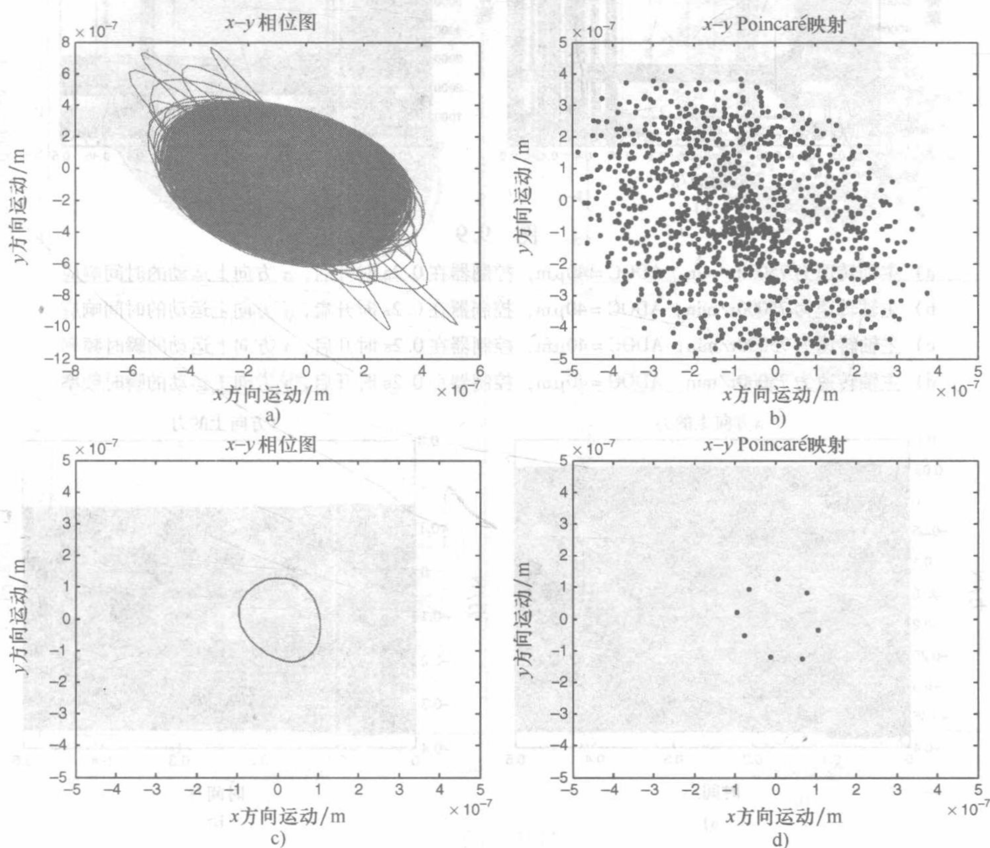


图 9.8

a）受控前 x-y 相位图　b）受控前 x-y Poincaré 映射　c）受控后，当主轴转速达到 75000r/min，ADOC = 40μm 时，x-y 相位图　d）受控后，当主轴转速达到 75000r/min，ADOC = 40μm 时，x-y Poincaré 映射

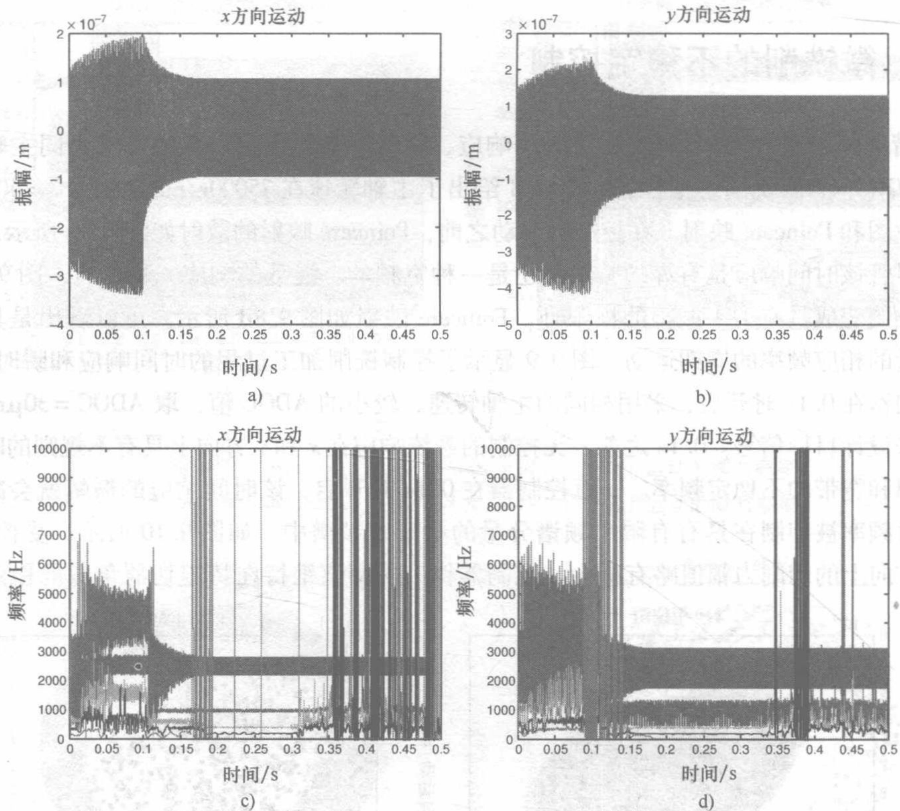


图 9.9

a) 主轴转速为75000r/min，ADOC=40μm，控制器在0.2s时开启，x方向上运动的时间响应

b) 主轴转速为75000r/min，ADOC=40μm，控制器在0.2s时开启，y方向上运动的时间响应

c) 主轴转速为75000r/min，ADOC=40μm，控制器在0.2s时开启，x方向上运动的瞬时频率

d) 主轴转速为75000r/min，ADOC=40μm，控制器在0.2s时开启，y方向上运动的瞬时频率

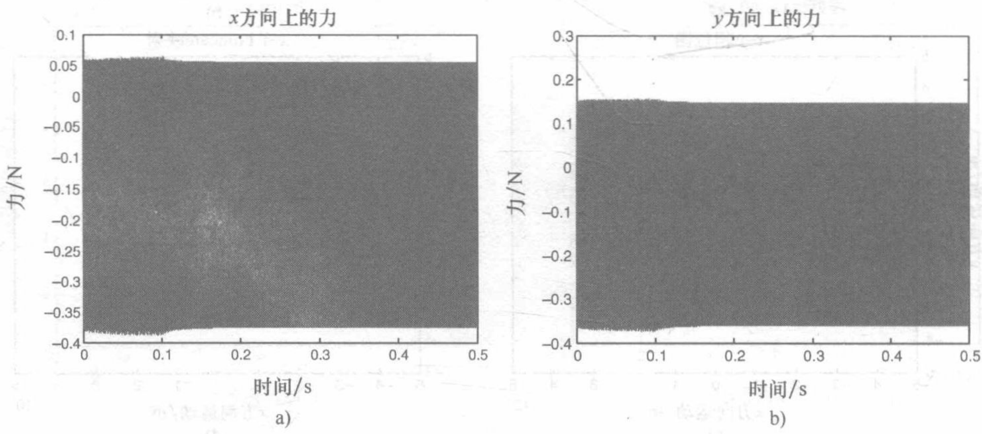


图 9.10

a) 主轴转速为75000r/min，ADOC=40μm，控制器在0.1s时开启，x方向上的力

b) 主轴转速为75000r/min，ADOC=40μm，控制器在0.1s时开启，y方向上的力

力极限附近，有效地抑制了由于动态不稳定而增加的切削力造成的负面影响。

如图9.11a所示，当主轴转速增加到90000r/min，ADOC = 85μm时，其相位图呈现的是一种不稳定的极限环，如图9.11b所示，其相应的Poincaré映射呈现一种分形结构。虽然不是混沌状态，但是这是一种宽频的、变化着的频谱，因此这是很难控制的。目标信号是由相同的主轴转速和50μm的轴向切割深度所组成。当控制器正在工作时，相位图中的响应变小一个数量级，并且Poincaré映射局限在小范围内，如图9.11c和图9.11d所示，这意味着该运动目前是一种吸引流形，具有带宽明显减少的频率响应。图9.12所示为控制铣削过程的时间响应和瞬时频率。0.1s时控制器开启之后，x和y方向上时间响应的幅值急速下降，因此这有助于改进工件公差。瞬时频率的异常时间振荡被调整并且变成具有有限带宽的稳定振荡，如图9.12c和图9.12d所示。受控后，两个方向上的切削力得到了有效的缓解和抑制，如图9.13所示。因此，提高了在这些切削情况下的刀具寿命。

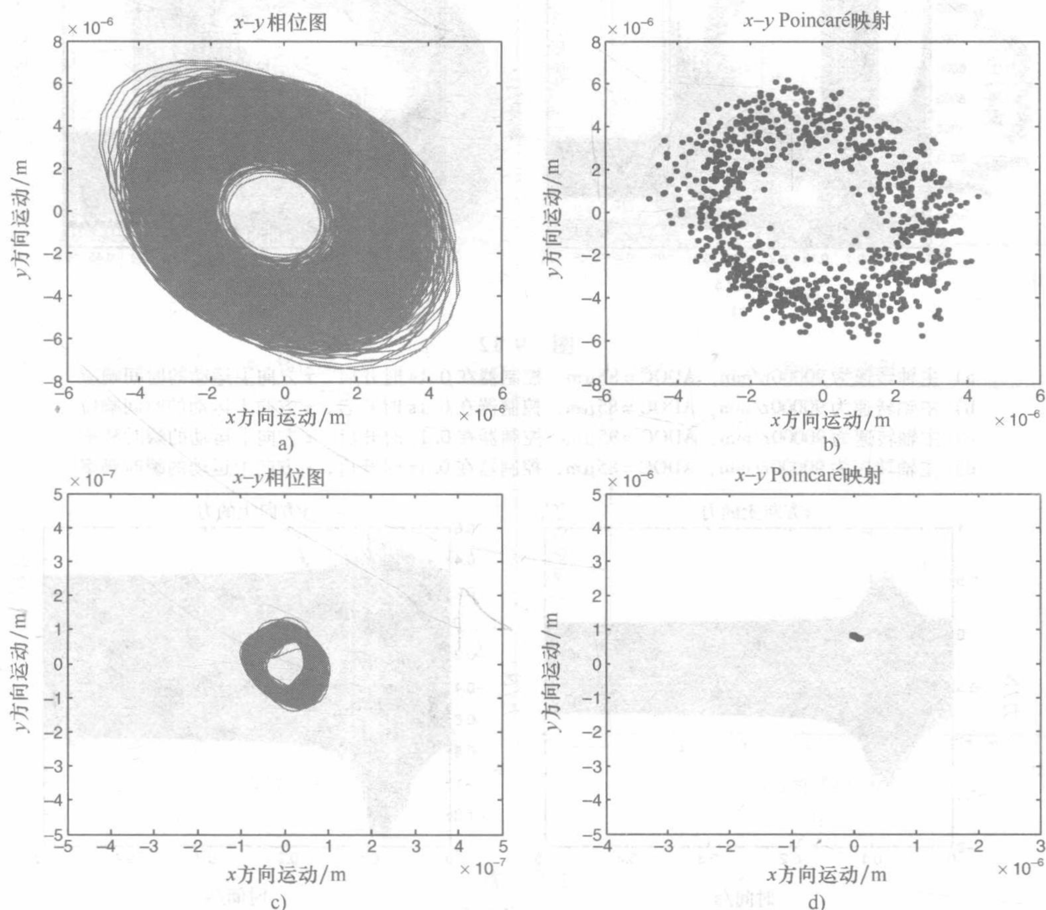


图　9.11

a）受控前 x-y 相位图　b）受控前 x-y Poincaré 映射

c）受控后，当主轴转速达到90000r/min，ADOC = 85μm时，x-y 相位图

d）受控后，当主轴转速达到90000r/min，ADOC = 85μm时，x-y Poincaré 映射

a)　　b)

c)　　d)

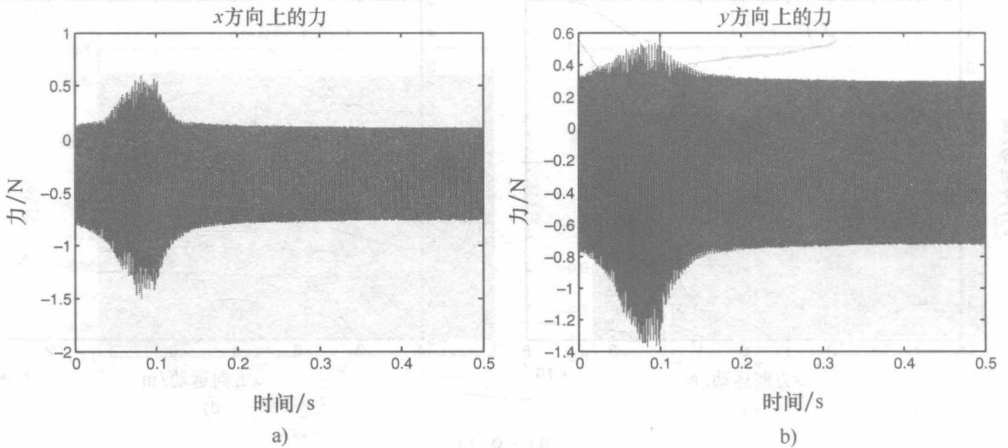
图　9.12

a）主轴转速为90000r/min，ADOC = 85μm，控制器在0.1s时开启，x方向上运动的时间响应

b）主轴转速为90000r/min，ADOC = 85μm，控制器在0.1s时开启，y方向上运动的时间响应

c）主轴转速为90000r/min，ADOC = 85μm，控制器在0.1s时开启，x方向上运动的瞬时频率

d）主轴转速为90000r/min，ADOC = 85μm，控制器在0.1s时开启，y方向上运动的瞬时频率



a)　　b)

图　9.13

a）主轴转速为90000r/min，ADOC = 85μm，控制器在0.1s时开启，x方向上的力

b）主轴转速为90000r/min，ADOC = 85μm，控制器在0.1s时开启，y方向上的力

主轴转速达到180000r/min，ADOC = 50μm时，时间响应的幅值增加并且变得极不规则。在这种情况下，目标信号是根据相同的主轴转速且30μm的轴向切割深度的情况来设计的。因为所有的轨迹会受到流形的排斥，由图9.14所示的相位图和Poincaré映射可以看出在受控之前，轨迹是一个具有多个频率的不稳定极限环。受控之后，响应减少到一个（类似）具有不匹配频率的周期运动，这表明运动动态得到改进。在图9.15中，当控制器进入运行状态后0.1s，时间响应和瞬时频率都稳定下来。采用控制器来减少时间响应的振幅并且清除瞬时频率下的异常振荡，系统结果产生窄带频率分量。如图9.16所示，切削力也随之减少并且保持稳定的切削力

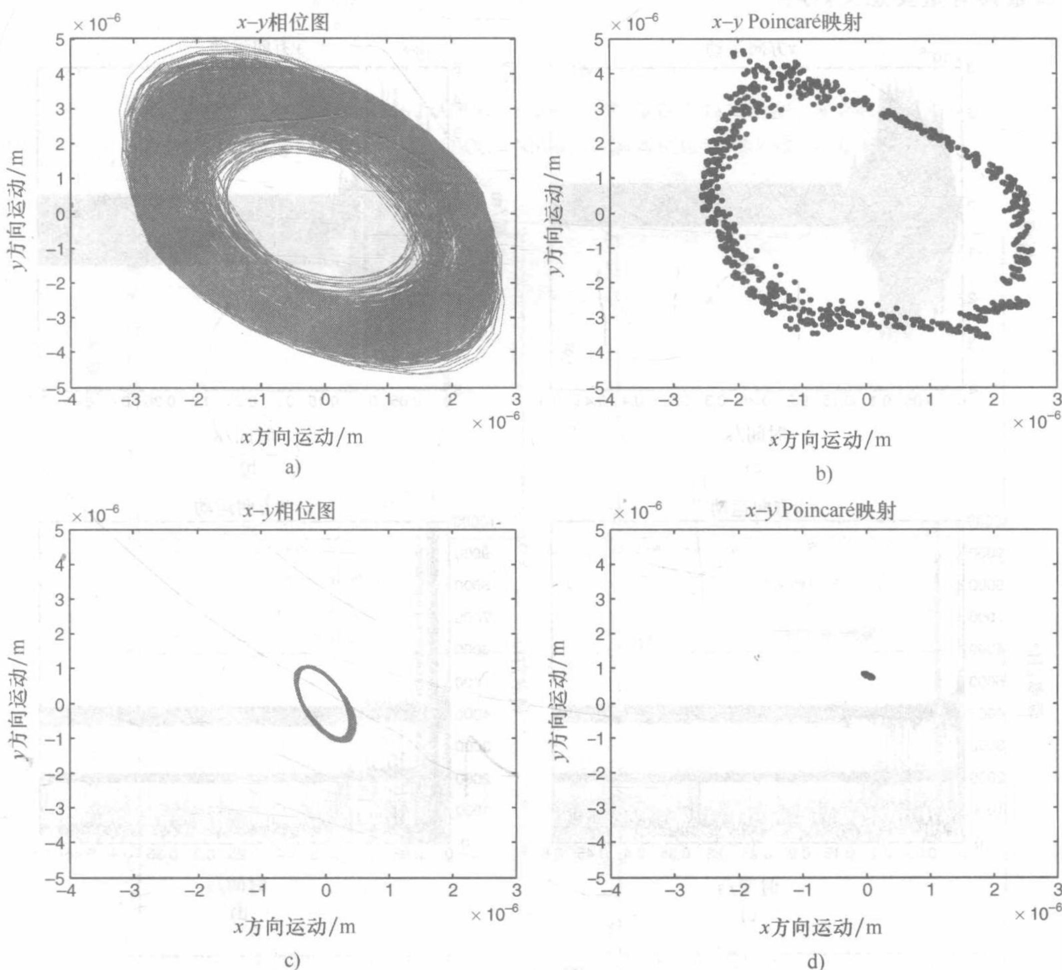


图　9.14

a）受控前，x-y相位图

b）受控前，x-y Poincaré映射

c）受控后，当主轴转速达到180000r/min，ADOC = 50μm时，x-y相位图

d）受控后，当主轴转速达到180000r/min，ADOC = 50μm时，x-y Poincaré映射

极限。

当主轴转速达到120000r/min，ADOC＝50μm时，刀刃的通过频率与刀具固有频率一致，便生成谐振响应。图9.17a和图9.17b所示的相位图和Poincaré映射给出在单一频率下的周期运动。在控制器运行之后，图9.17c表示的是一个幅度减少的相位图。图9.18中的时间响应和瞬时频率给出了谐振幅度和4000Hz的单一频率。根据相同的主轴转速和30μm的轴向切割深度的情况来对目标信号进行设计。在控制器运行之后，时间响应的振幅减少并且保持其频率响应不变。控制之后，两个方向上的切削力的变化幅值也都保持不变，如图9.19所示。振幅的减少对于提高在高速切削加工时的产品质量具有重要意义。

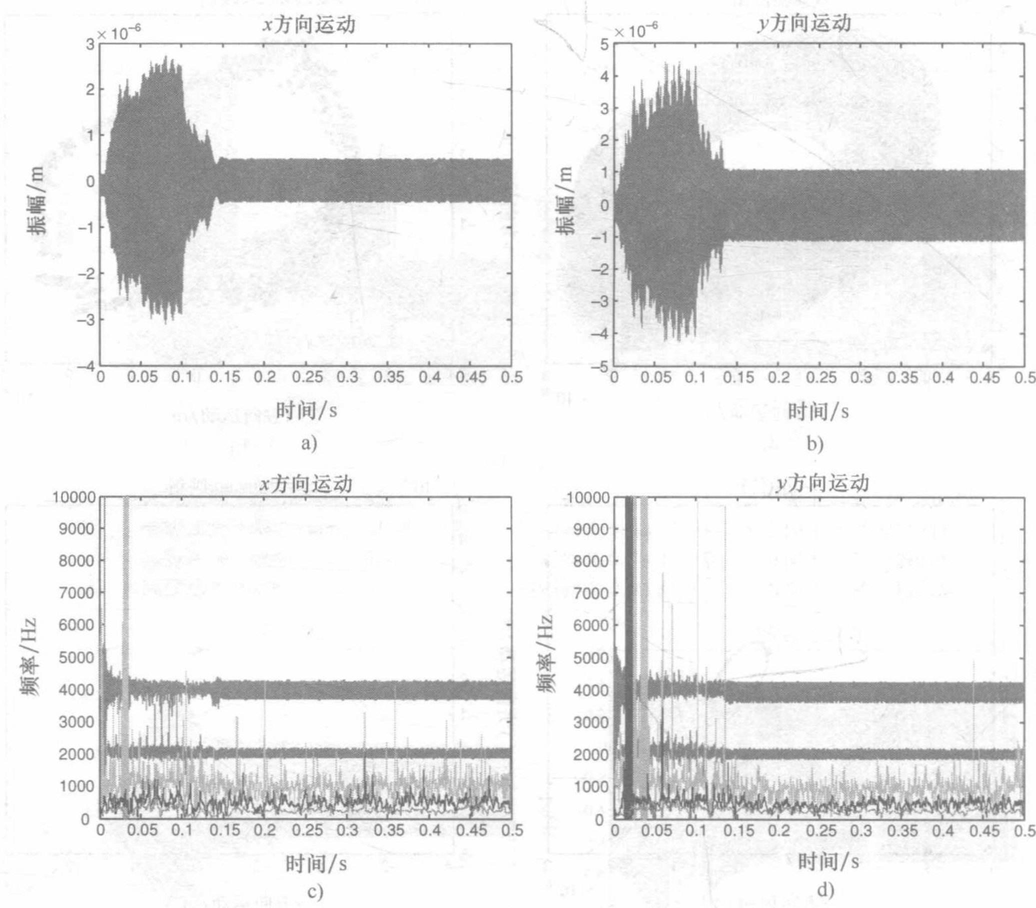


图　9.15

a）主轴转速为180000r/min，ADOC＝50μm，控制器在0.1s时开启，x方向上运动的时间响应

b）主轴转速为180000r/min，ADOC＝50μm，控制器在0.1s时开启，y方向上运动的时间响应

c）主轴转速为180000r/min，ADOC＝50μm，控制器在0.1s时开启，x方向上运动的瞬时频率

d）主轴转速为180000r/min，ADOC＝50μm，控制器在0.1s时开启，y方向上运动的瞬时频率

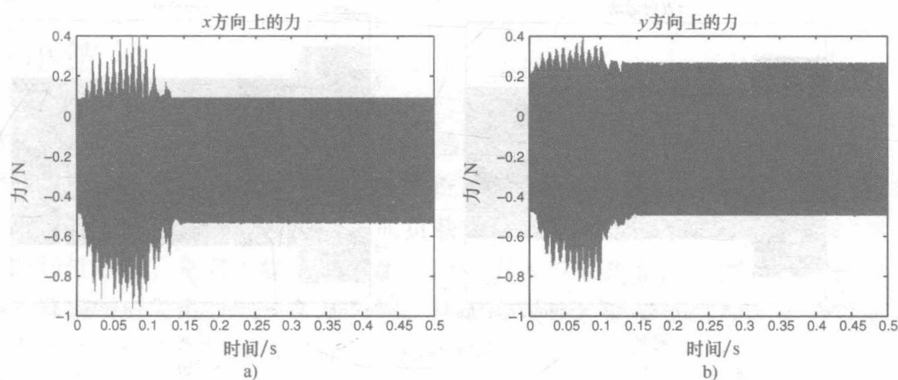


图　9.16

a）主轴转速为180000r/min，ADOC = 50μm，控制器在0.1s时开启，x方向上的力

b）主轴转速为180000r/min，ADOC = 50μm，控制器在0.1s时开启，y方向上的力

图　9.17

a）受控前x-y相位图　b）受控前x-y Poincaré映射

c）受控后，当主轴转速达到120000r/min，ADOC = 50μm时，x-y相位图

d）受控后，当主轴转速达到120000r/min，ADOC = 50μm时，x-y Poincaré映射

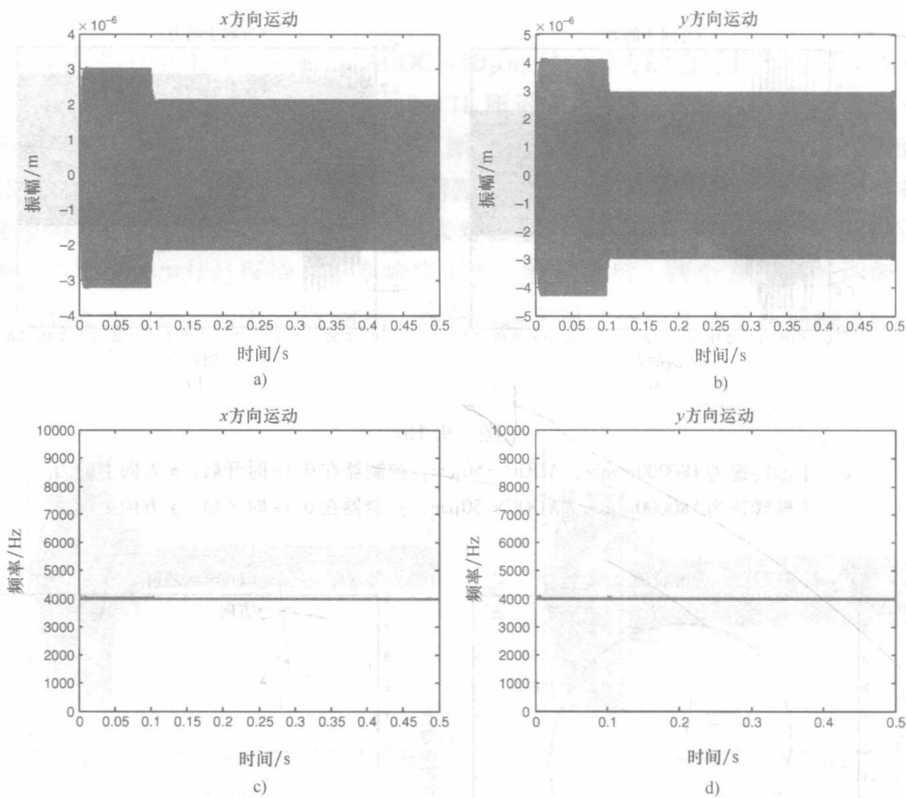


图　9.18

a）主轴转速为120000r/min，ADOC = 50μm，控制器在0.1s时开启，x方向上运动的时间响应
b）主轴转速为120000r/min，ADOC = 50μm，控制器在0.1s时开启，y方向上运动的时间响应
c）主轴转速为120000r/min，ADOC = 50μm，控制器在0.1s时开启，x方向上运动的瞬时频率
d）主轴转速为120000r/min，ADOC = 50μm，控制器在0.1s时开启，y方向上运动的瞬时频率

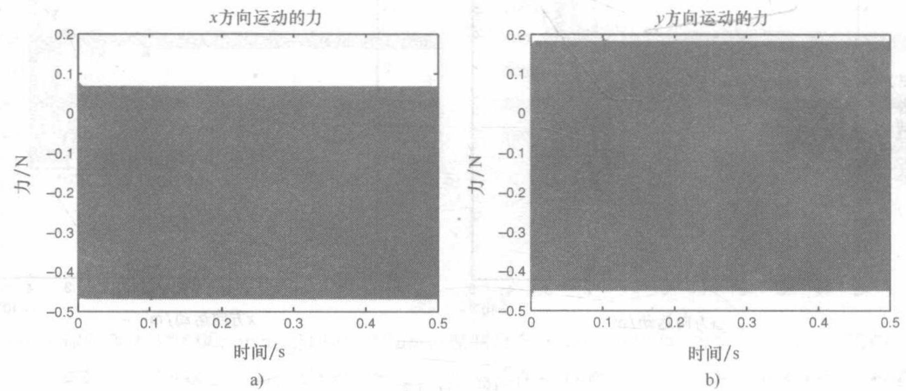


图　9.19

a）主轴转速为120000r/min，ADOC = 50μm，控制器在0.1s时开启，x方向上的力
b）主轴转速为120000r/min，ADOC = 50μm，控制器在0.1s时开启，y方向上的力

9.5　小结

微铣削过程对于动态不稳定是高度敏感的，动态不稳定会导致过早地出现刀具破损、磨损速度加快和工件质量较差。在微铣削加工中需要通过高速的主轴转速来实现合理的材料去除率，同时还要保持切屑负载为最小值。这种系统高频激励增强了动态响应的非线性影响，随着不稳定的发生，通过引入越来越宽的频谱对切削性能产生消极影响。这表明应考虑时域和频域影响，从而有效地控制微铣削加工，并且测试控制算法要求微铣削模型能够获得过程中的高频特征。

基于小波变换的时频控制器被纳入非线性多维微铣削模型，用来在不同的主轴转速和轴向切割深度条件下控制和提高动态响应，这些条件会产生不稳定动态运动。将两个独立的非线性控制器放置在模型的前面来调整切削力激励和具有所有物理意义频率模型的目标信号，并且利用可接受幅值来控制这一过程。该控制器适用于主轴转速激励在63000～180000r/min之间的不稳定切削。对于每种情况，控制器展示了其减少系统振幅的能力，这对于提高过程效率和在不同的主轴转速下实现并维持高精度切割是非常重要的。同时也通过观察切削力来适当减轻和控制在特定的进给量和轴向切割深度条件下的稳定的切削力值。控制器避免了由于动态不稳定而增加切削力所造成的负面影响，因此不仅延长了刀具的寿命，还消除了在突然不稳定高速激励下的刀具损坏。瞬时频率图、相位图和 Poincaré 映射阐明了在该控制器启用后，在时域和频域下改进的运动动态。这是从图中频率响应带宽的减少观察到的，改进后从根本上延长了刀具的使用寿命和减少了刀具的磨损率。在高速激励下的高度非线性微铣削过程中对基于小波变换的时频控制器的应用，证明了控制器在时域和频域过程中的缓和能力，并且使得刀具性能和工件质量得到显著提高。

参考文献

[1] Tansel, I., Rodriguez, M., Trujillo, E., Li, W., 1998, "Micro-End-Milling – I. Wear and Breakage," *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 38(12), 1419–36.

[2] Gandarias, S., Dimov, S., Pham, D. T., Ivanov, A., Popov, K., Lizarralde, R., Arrazola, P.J., 2006, "New Methods for Tool Failure Detection in Micromilling," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 220(2), 137–44.

[3] Byrne, G., Dornfeld, D., Denkena, B., 2003, "Advancing Cutting Technology," STC "C" Keynote, *CIRP Annals*, 52(2), 483–507.

[4] Basuray, P. K., Misra, B. K., Lal, G. K., 1977, "Transition From Ploughing to Cutting During Machining with Blunt Tools," *Wear*, 43(3), 341–49.

[5] Afazov, S. M., Ratchev, S. M., Segal, J., Popov, A. A., 2012, "Chatter Modeling in Micro-Milling by Considering Process Nonlinearities," *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 56(May), 28–38.

[6] Park, S., Rahnama, R., 2010, "Robust Chatter Stability in Micro-Milling Operations," *CIRP Annals – Manufacturing Technology*, 59(1), 391–94.

[7] Shi, Y., Mahr, F., Wagner, U., Uhlmann, E., 2012, "Chatter Frequencies of the Micromilling Processes: Influencing Factors and Online Detection via Piezoactuators," *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 56(May), 10–16.

[8] Jin, X., Altintas, Y., 2012, "Prediction of Micro-Milling Forces with Finite Element Method," *Journal of Materials Processing Technology*," 212(3), 542–52.

[9] Jin, X., Altintas, Y., 2011, "Slip-Line Field Model of Micro-Cutting Process with Round Tool Edge Effect," *Journal of Materials Processing Technology*, 211(3), 339–55.

[10] Fang, N., 2003, "Slip-Line Modeling of Machining With A Rounded Edge Tool – Part I: New Model and Theory," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(4), 715–42.

[11] Kim, J. D., Kim, D. S., 1995, "Theoretical Analysis of Micro-Cutting Characteristics in Ultra-Precision Machining," *Journal of Materials Processing Technology*, 49(3), 387–98.

[12] Waldorf, D. J., DeVor, R. E., Kapoor, S. G., 1998, "A Slip-Line Field for Ploughing During Orthogonal Cutting," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 120(4), 693–99.

[13] Jun, M. B., Liu, X., DeVor, R. E., Kapoor, S. G., 2006, "Investigation of The Dynamics of Microend Milling – Part I: Model Development," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 128(4), 893–900.

[14] Halfmann, E. B., Suh, C. S., 2012, "High Speed Nonlinear Micro Milling Dynamics," MSEC2012-7287, *2012 International Manufacturing Science and Engineering Conference (MSEC 2012)*, Notre Dame, IN, ASME, New York.

[15] Chae, J., Park, S. S., Freiheit, T., 2006, "Investigation of Micro-Cutting Operations," *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 46(3), 313–32.

[16] Rahnama, R., Sajjadi, M., Park, S. S., 2009, "Chatter Suppression in Micro End Milling with Process Damping," *Journal of Material Processing Technology*, 209(17), 5766–76.

[17] Fortgang, J., Singhose, W., de Juanes Márquez, J., Pérez, J., 2005, "Command Shaping for Micro-Mills and CNC Controllers," *American Control Conference*, Portland, OR, IEEE Press, 4531–36.

[18] Liu, P., Zhao, D., Zhang, L., Zhang, W., 2008, "Study of Cross-Coupling Control Approach Applied in Miniaturized NC Micro-Milling Machine Tool," *IEEE International Symposium on Knowledge Acquisition and Modeling Workshop*, IEEE Press, 888–91

[19] Aggogeri, F., Al-Bender, F., Brunner, B., Elsaid, M., Mazzola, M., Merlo, A., Ricciardi, D., de la O Rodriguez, M., Salvi, E., 2013, "Design of Piezo-based AVC System for Machine Tool Applications," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36(1), 53–65.

[20] Jun, M. B., DeVor, R. E., Kapoor, S. G., 2006, "Investigation of the Dynamics of Microend Milling – Part II: Model Validation and Interpretation," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 128(4), 901–12.

[21] Malekian, M., Park, S., Jun, M., 2009, "Modeling of Dynamic Micro-Milling Cutting Forces," *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 49(7), 586–98.

第10章 摩擦诱发的不稳定性的时频控制

金属切削是刀具与切屑啮合的重要接触过程，并且会造成摩擦的动态不连续。摩擦诱发的非线性振动和刀具磨损是影响工件质量和生产产量的负面因素之一[1]。在本章中研究了由摩擦诱发的不稳定性及不连续性。在接下来的小节将会对柔性悬臂梁压在一个刚性旋转盘的问题进行探讨，从而研究自激摩擦振动。由于交变的摩擦情况和减少的动态摩擦特性，该自激摩擦振动本质上是不稳定的。本章学习的知识对金属加工控制有着重要的影响。因为没有线性化或类似方案可参考，本章充分且没有任何修饰地揭示了摩擦圆盘模型系统的真实特性，包括粘滑运动和固有的不连续。将看到系统动态只有在相对速度的一定范围内是稳定的。随着相对速度的增加，响应失去稳定并出现发散的振幅和变宽的频谱。基于小波变换的时频控制随后被应用到通过调整施加的法向力来抑制在较高的相对速度下的混沌振动。控制器的设计需要没有解析解或传递函数，从而使得不连续系统的基本特性得到充分确立并得到适当的控制。本章做了许多重要的观测，包括有效地抑制在较高相对速度下初始的混乱响应，导致系统恢复到相对稳定的状态极限环。

10.1 摩擦诱发的振动控制问题

摩擦包括两个不同的状态。在“黏住”状态下，两个接触的物体处于静止状态，静摩擦力阻碍两个物体相对运动。一旦有了相对运动，用较低的相对速度下出现的负斜率的力-速度曲线表征“滑动”状态。当两个接触的物体开始移动时，摩擦力就减少了，但是在较高的相对速度的情况下该摩擦力的值会再次增加。摩擦诱发的振荡在这两种状态之间进行周期性切换，并显示粘滑运动[2]。粘滑运动可以说是具有自激振动系统的极限环，其稳定性由流入系统的能量和从系统耗散的能量决定[3]。如果由能量源流入系统的能量大于耗散的能量，那么该振动的振幅会增大。反之，振幅减少。当能量输入和耗散的能量在每个周期内都处于平衡时，便形成极限环[4]。一些研究表明摩擦诱发的振荡会进入亚临界分叉，并且轻微地干扰不稳定系统可能会导致大振幅的振动[5]。摩擦诱发的振动是出现制动噪声、过度磨损、疲劳、位置误差和经常性物理损坏的原因。

对摩擦振动的生成机制已经进行了实验研究[4]。结果表明，自激摩擦振动是由降低的摩擦特性、脉动的法向力、几何效应和非守恒恢复力造成的。当动摩擦系数和相对速度之间的关系为负相关时，在平衡点的稳定滑动变得不稳定，该不稳定会导致振动产生[6]。粘滑振动是通过交替的摩擦模型生成的，也已从数值上对粘滑运动进行了研究[7]。追赶法应用到寻找周期解与交替的摩擦模型的组合共同查找周期性粘滑解决

方法中。在相位图中观察粘滑运动和准谐振动。在文献中提出了几种控制摩擦振动的方法。时间延迟位置反馈控制力应用到与摩擦力平行和垂直的方向上的质体-传输带摩擦系统模型上[5]。结果显示分叉性质从亚临界变为超临界状态，该方法在线性稳定体制中是全局稳定的。旋转圆盘上的摩擦诱发的振动是由时间延迟位置反馈控制力所控制的[8]。该控制可以将振动幅值减少到几乎为零。参考文献［9］中提到递归的时间滞后加速度反馈控制应用于质体-传输带摩擦系统模型上。控制信号是由在过去的固定时间间隔内对振动系统所测量的加速度的无限加权递归确定的。

参考文献［2］小振幅的高频振荡应用于质体-传输带摩擦系统模型上并和摩擦力平行。加入的高频谐波励磁阻碍了自激振荡的发生。该方法不是减少自激振荡使其变为绝对静止状态，而是将振荡变为在高频下的小振幅振荡。参考文献［10］中研究了库仑摩擦振荡器在运动的传输带上的两个简谐激励作用下的动态。系统动态受到频率比和励磁振幅的影响。在高频率比和大振幅下，系统动态会从混沌运动变为周期性运动。脉动的法向力由一个恒定的力和一个叠加的正弦力组成，适用于参考文献［11］中运动的传输带模型，该模型中的粘滑运动受到抑制并且减少了振动幅值。

参考文献［12］中提到的调制正常负载，其开关方式取决于系统状态，并适用于在移动的传输带上的单自由度振荡器模型。用李雅普诺夫第二方法衍生出的控制规律来确保耗散的能量，该控制规律能够抑制不稳定极限环并且将其转换为稳定的粘滑极限环。参考文献［13］中，主控规律通过压电驱动器来改变在接合处的正常的接触力。基于李雅普诺夫函数的控制规律被设计成类似于双滞环控制器，能最大限度地控制瞬时能量耗散。与具有恒定法向力的节点相比，控制器极大地减少了系统振动。主控制技术被用来提高消除由未知的摩擦力和外部扰动引起的极限环和稳态误差这一性能[14]。采用自适应模糊推理系统和比例-微分补偿控制器对未知的摩擦动态进行建模。李雅普诺夫稳定性判据用来确保具有比例-微分控制器的适应模糊模型的收敛性。

然而，先前概述的所有的控制方法都有一定的缺点。对于时间延迟反馈控制方法，合成控制力和延迟时间间隔数目的方法只可以由启发式确定。采用高频振荡和脉动的法向力都有相同的缺点。它们缺乏一个系统的方法来设计控制器和预测性能。因为采用线性近似值确定控制器参数进行稳定性研究，不能精确地确定摩擦诱发的动态的稳定边界。李雅普诺夫稳定性判据通常用于主控规律的设计。但是对于一个复杂系统的李雅普诺夫候选函数很难取得。因此，基于李雅普诺夫稳定性判据的控制器的设计只适用于简单系统或是通过明显简化了的线性近似模型。然而，线性近似方法无法实现任何混沌路径的真实特性[15]。因为时间响应和频率响应在混沌路径的过程中同时恶化，同时在时域和频域上设计一个非线性控制器是至关重要的，特别是对于高度非线性、间歇性摩擦诱发振动的系统。参考文献［16］中建立了一种基于小波变换的时频控制器抑制了同时发生的时频恶化，该恶化与分叉、混沌的不稳定状态有关。在前面的章节，该控制器已经被证明能够有效地遏制在高速下的铣削振动和恢复铣削稳定性

到一个具有极低速的刀具振动的极限环的状态[17]。在接下来的章节中，利用有限元法和有限差分格式来模拟摩擦诱发的振动，该振动是由于柔性悬臂梁压在刚性旋转盘而造成的。由于没有采用近似的方法，模型保留了摩擦导致的混沌路径的基本特性。第 7 章中介绍的基于小波变换的时频控制器将应用于没有使用解析解的数值模型。

10.2　连续旋转盘圆盘模式

参考文献 [8] 中简化的摩擦诱发的振动模型被用于研究。该模型包括静态和动态摩擦之间的不连续性及相对速度下的动摩擦系数。它是由一个具有末端质块的悬臂梁组成的，该末端质块与刚性旋转圆盘摩擦接触，如图 10.1a 所示。该圆盘以一个恒定的角速度 ω_d旋转。假设圆盘为刚性并且没有弯曲振动或摇摆运动。悬臂梁末端与末端质块相连，并且以正常的恒力 F 将末端质块推向刚性圆盘，从而在 x-y 平面上产生摩擦力 F_r，这也是相对速度 V_r的函数。

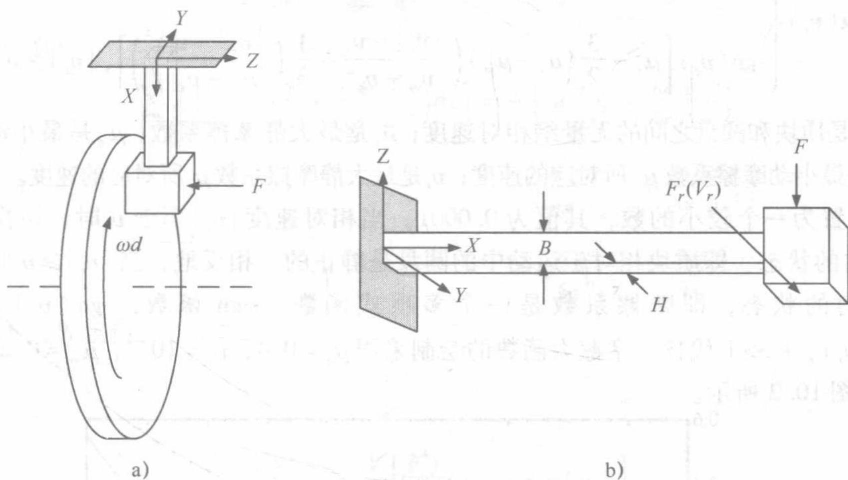


图　10.1

a）旋转圆盘模型　b）具有质块的柔性悬臂梁

连续旋转的圆盘模型应遵循：

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}=0 \tag{10.1}$$

并且满足以下边界条件：

$$y(0,\tau)=0,\ \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=1}=0 \tag{10.2}$$

和

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}\right|_{x=1}-r_m\left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=1}=N_0\mu(v_r) \tag{10.3}$$

式中，无量纲的变量被定义为

$$x=\frac{X}{L},\ y=\frac{Y}{L},\ \tau=\Omega t$$

$$\Omega=\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}},\ r_m=\frac{\rho AL}{M}$$

$$N_0=\frac{N_0^*}{M\Omega^2L},\ v_d=\frac{V_d}{\Omega L},v_r=v_d-\left.\frac{\partial y}{\partial \tau}\right|_{x=1}$$

式中，N_0^*是附加的典型负载；L是梁的长度；M是末端质块的质量；E是弹性系数；ρ是梁的材料的质量密度；$I=BH^3/12$是梁横截面的面积转动惯量；$A=BH$是截面积；v_d是圆盘速度；v_r是圆盘和端部质块之间归一化的相对速度。

粘滑运动的摩擦系数遵循参考文献［1］中提出的一个公式，避免了由于相对速度为零的作用导致不连续性造成的收敛速度慢和数值不稳定的问题。

$$\mu(v_r)\begin{cases}\dfrac{\mu_s v_r}{v_s},\ |v_r|<v_s\\ \operatorname{sgn}(v_r)\left[\mu_s-\dfrac{3}{2}(\mu_s-\mu_m)\left(\dfrac{|v_r|-v_s}{v_m-v_s}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{|v_r|-v_s}{v_m-v_s}\right)^3\right)\right],|v_r|\geqslant v_s\end{cases}\tag{10.4}$$

式中，v_r是质块和圆盘之间的无量纲相对速度；μ_s是最大静摩擦系数；μ_m是最小动摩擦系数；v_m是最小动摩擦系数μ_m所对应的速度；v_s是最大静摩擦系数μ_s所对应的速度。

v_s设置为一个较小的数，其值为0.0001。当相对速度$|v_r|$小于v_s时，该模型描述的是黏住的状态，即质块相对于运动中的圆盘是静止的。相反地，当$|v_r|\geqslant v_s$时，描述的是滑动的状态，即摩擦系数是一个多项式函数。sign 函数，sgn(v_r)可以用 arctan(kv_r)，$k>>1$ 代替。摩擦力函数的绘制采用$\mu_s=0.4$，$v_s=10^{-4}$，$\mu_m=0.25$，$v_m=0.5$，如图10.2所示。

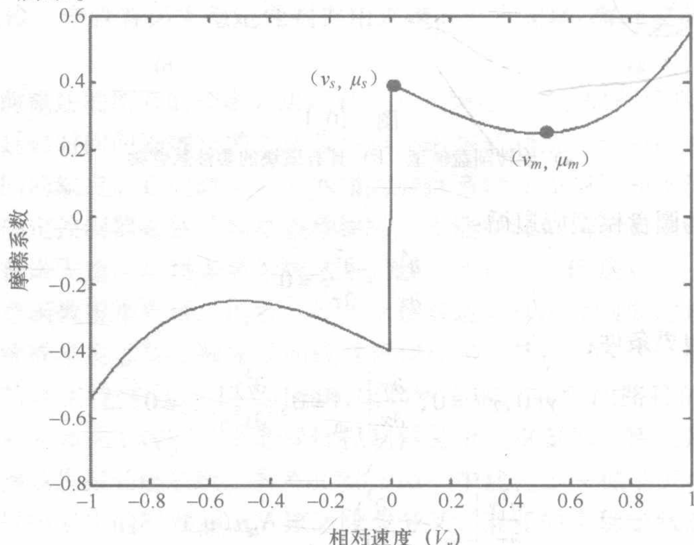


图10.2 相对速度-摩擦系数的函数

要从数值上解决式（10.1）~式（10.3）的边值问题，运用伽辽金法归一化梁方程并推导出相应的有限元公式。式（10.1）的平均加权残差为

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) w \mathrm{d}x = 0 \tag{10.5}$$

式中，归一化的梁的长度为 1，w 是权重函数。

梁离散成若干个有限元素，如图 10.3 所示。

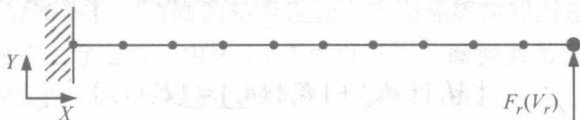


图 10.3　离散化的盘式制动器模型

Ω^e 为元素的定义域，n 为梁元素的个数，式（10.5）变为

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\Omega^e} \left(w \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}x \right] + \left[w \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_0^1 = 0 \tag{10.6}$$

也可以写成：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\Omega^e} \left(\omega \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}x \right] &= - \left[\omega \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_0^1 \\ &= - \omega \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \bigg|_{x=1} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \bigg|_{x=1} \\ &\quad + \omega \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \bigg|_{x=0} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \bigg|_{x=0} \end{aligned} \tag{10.7}$$

满足以下边界条件：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \bigg|_{x=1} = 0 \tag{10.8}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \bigg|_{x=1} = \frac{1}{r_m} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \bigg|_{x=1} - N_0 \mu(v_r) \right] \tag{10.9}$$

$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=0}$ 和 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0}$ 分别是在固定端归一化的梁的剪切力和弯矩。厄米特形状函数用于在节点变量 ν_1、θ_1、ν_2 和 θ_2 中插值横向挠度 ν。图 10.4 中使用了两个节点元素。

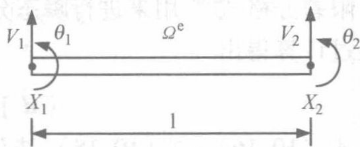


图 10.4　两个节点元素

因此，横向挠度 ν 是

$$v(x) = H_1(x) v_1 + H_2(x) \theta_1 + H_3(x) v_2 + H_4(x) \theta_2 \tag{10.10}$$

式中

$$\boldsymbol{d} = (v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2)^{\mathrm{T}}$$

$$H_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$H_2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

$$H_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$$

$$H_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

通过在式（10.7）的左边应用厄米特形状函数和伽辽金法来取得两节点元素的动态方程。

$$[\boldsymbol{M}_e]\{\ddot{\boldsymbol{d}}_e\} + [\boldsymbol{K}_e]\{\boldsymbol{d}_e\} = \{\boldsymbol{F}_e(t)\} \tag{10.11}$$

意味着$[\boldsymbol{H}] = \{H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4\}$和$[\boldsymbol{B}] = \{H_1'' \quad H_2'' \quad H_3'' \quad H_4''\}$，因此

$$[\boldsymbol{M}_e] = \int_0^l [\boldsymbol{H}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}]\mathrm{d}x = \frac{r_m l}{420}\begin{pmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{pmatrix} \tag{10.12}$$

$$[\boldsymbol{K}_e] = \int_0^l [\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}]\mathrm{d}x = \frac{1}{l^3}\begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \tag{10.13}$$

相邻元素之间的内力抵消了，只有剩下外力构建$\{\boldsymbol{F}_e(t)\}$。在此模型中只有边界条件需要被看成是外力。动态梁分析结果的耦合矩阵（$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{F}$）由概括了所有相应的元素的矩阵和矢量（$\boldsymbol{M}_e$、$\boldsymbol{K}_e$和$\boldsymbol{F}_e$）组成。t时刻的耦合矩阵为

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}^t + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{d}\}^t = \{\boldsymbol{F}\}^t \tag{10.14}$$

有限差分格式[18]用来进行瞬态分析。假定可以得到初始位置和速度。初始加速度可以通过计算得出

$$\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}^0 = [\boldsymbol{M}]^{-1}\{\{\boldsymbol{F}\}^0 - [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{d}\}^0\} \tag{10.15}$$

由式（10.16）~式(10.18）迭代计算来近似式（10.14）中每一时刻的瞬时速度、位移和加速度：即

$$\{\dot{\boldsymbol{d}}\}^{t+1} = \{\dot{\boldsymbol{d}}\}^t + \{\ddot{\boldsymbol{d}}\}^t \cdot \Delta t \tag{10.16}$$

$$\{\boldsymbol{d}\}^{t+1} = \{\boldsymbol{d}\}^t + \{\dot{\boldsymbol{d}}\}^{t+1} \cdot \Delta t \tag{10.17}$$

$$\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}^{t+1} = [\boldsymbol{M}]^{-1}\{\{\boldsymbol{F}\}^t - [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{d}\}^{t+1}\} \tag{10.18}$$

10.3　摩擦诱发的动态振动

为了研究摩擦诱发的振动的动态，设定以下无量纲参数的值为 $r_m=0.8$，$N_0=2$，$\mu_s=0.4$，$\mu_m=0.25$，$\upsilon_m=0.5$。圆盘速度 $\boldsymbol{\upsilon}_d$是控制参数。图 10.2 遵循摩擦系数和相对速度的相关性。端部质块的动态相当于图 10.5 中 $\boldsymbol{\upsilon}_d=0.2$ 的情况。响应稳定之后，图 10.5a所示的速度分布表现出清晰的粘滑运动。当端部质块和圆盘同步移动时，静摩擦在一定周期时间内占主导地位。由图 10.2 可以看出，摩擦系数和图 10.5b 中的相对速度成反比。该自激振荡形成一个稳定的极限环，如图 10.5c 所示。在图 10.5d 中动态摩擦的静摩擦系数为 0.8，其值小于静摩擦情况下的静摩擦系数并且该静摩擦系数通过时间窗口周期性出现。从图 10.5e 中观察到其主频为 0.1Hz。然而，图 10.5f 中的瞬时

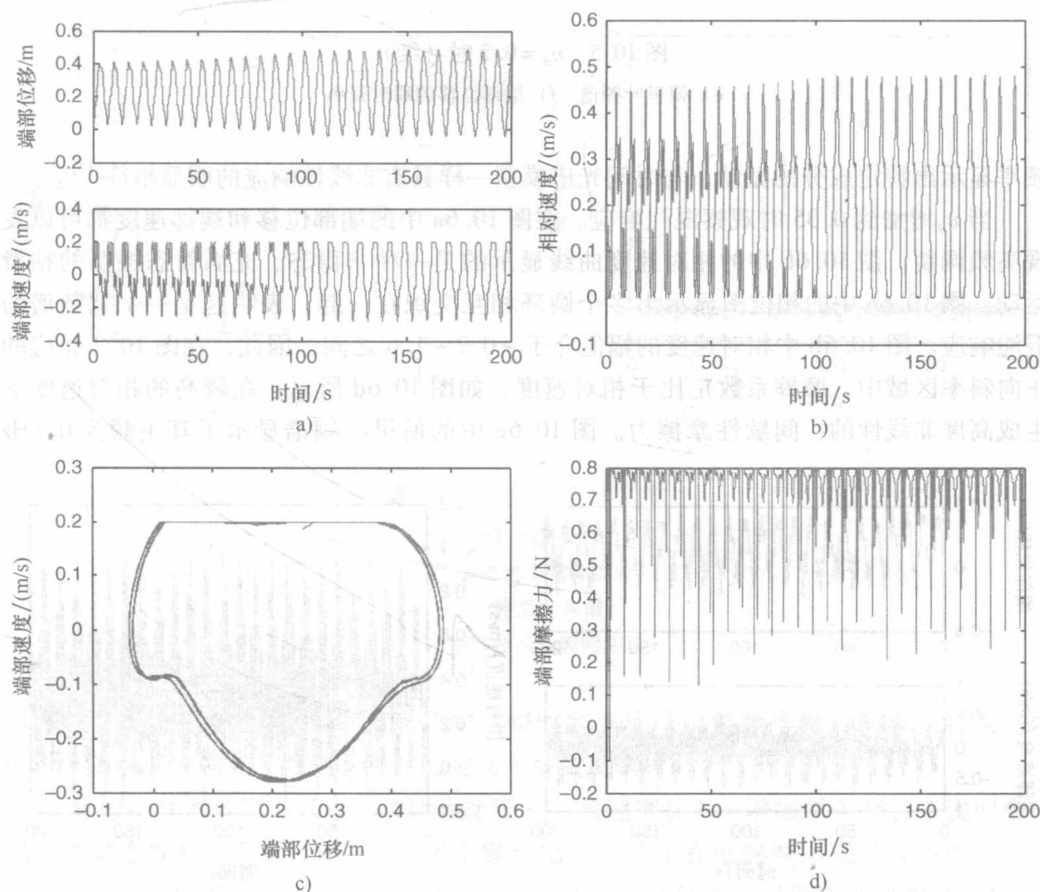


图 10.5　$\boldsymbol{\upsilon}_d=0.2$ 时

a）端部位移和速度　b）端部质块和圆盘间的相对速度

c）相位图　d）y 方向上的摩擦力

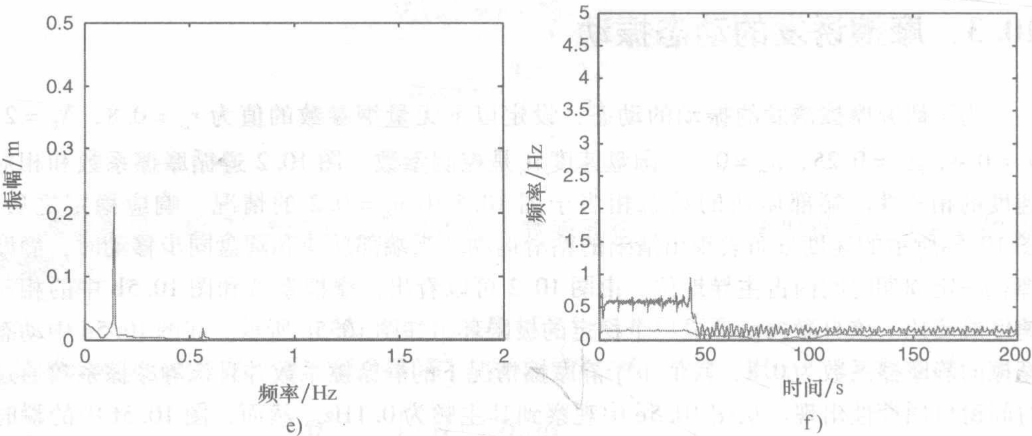


图 10.5 $\upsilon_d=0.2$ 时（续）

e）傅里叶频谱 f）端部位移的瞬时频率

频率显示出特定成分的振动，与时间光谱模型一样具有非线性响应的明显指征[14]。

当υ_d增加到0.35时观察混沌响应。在图10.6a中的端部位移和端部速度都可以发现高频调制。图10.6b中的相对速度曲线显示的是一种非稳态、充满暂态振荡的粘滑运动。图10.6c中的相位图显示出多个圆环相互交织在一起，表明这是一个宽频谱的混沌响应。图10.6b中相对速度的幅值介于-0.2~1.0之间，因此，在图10.2相应的正向斜率区域中，摩擦系数正比于相对速度。如图10.6d所示，在较高的相对速度下生成高度非线性的、间歇性摩擦力。图10.6e中的傅里叶频谱显示了其主频为0.1Hz

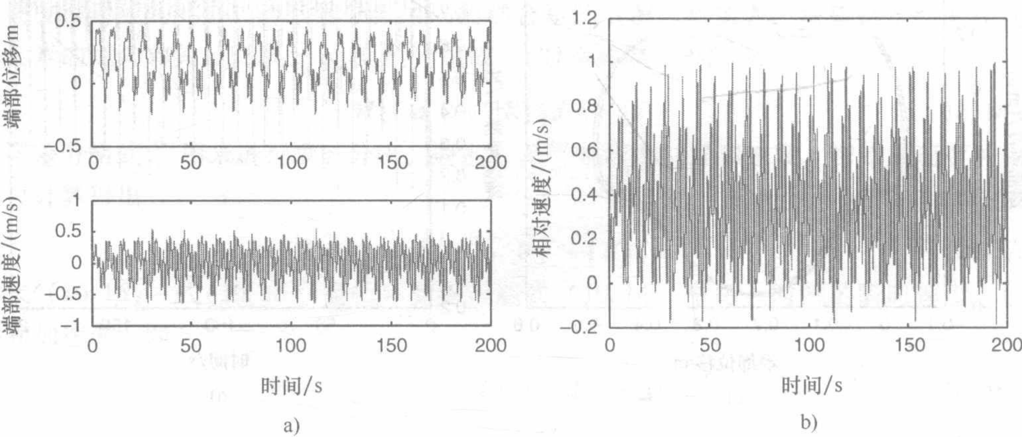


图 10.6 $\upsilon_d=0.35$ 时

a）端部位移和速度

b）端部质块和圆盘间的相对速度

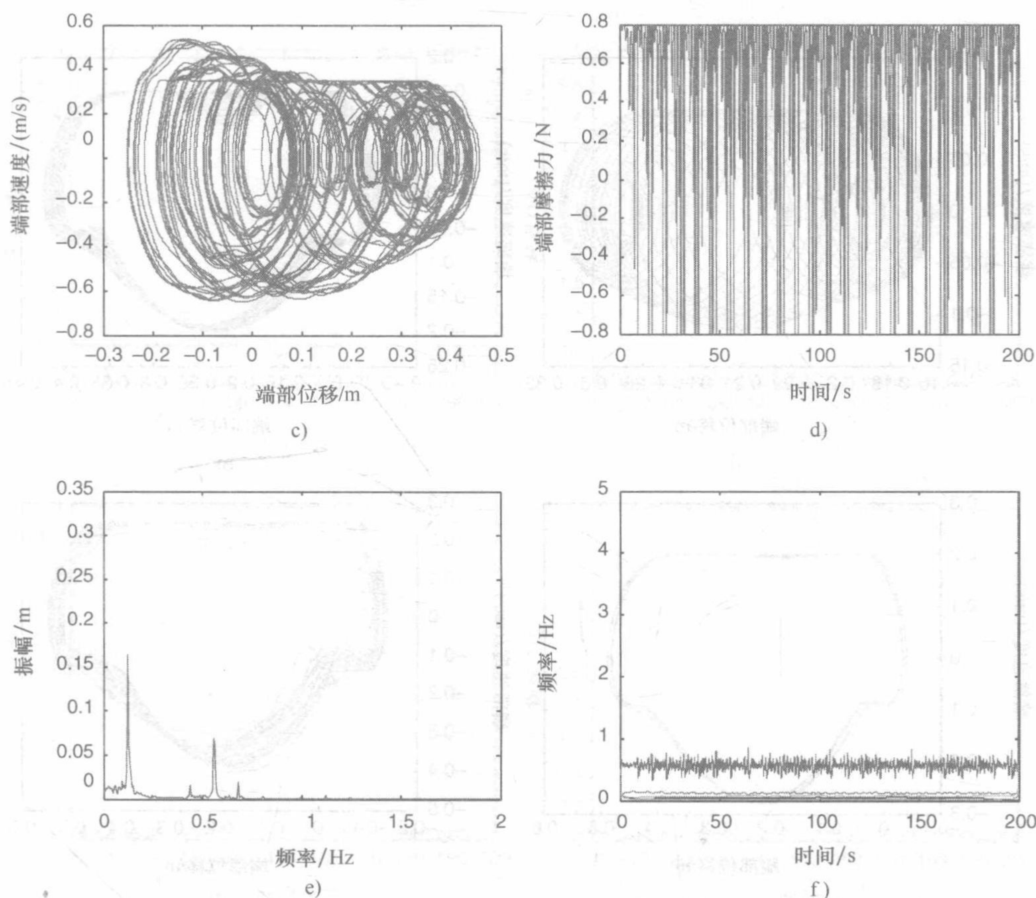


图 10.6　$\upsilon_d = 0.35$ 时（续）

c）相位图

d）γ 方向上的摩擦力

e）傅里叶频谱

f）端部位移的瞬时频率

和一些 0.5Hz 左右的频率。图 10.6f 中的瞬时频率反映了该频率响应的真实特性，即 0.5Hz 频率成分是混沌类型下明显的时间光谱振荡模式。

图 10.7 中相位图是通过增加圆盘速度 υ_d，将速度从 0.1 增加到 0.35，来说明摩擦诱发的动态发展。图 10.7a 所示的多个圆环结构描述了在低速时出现的混沌响应。在图 10.7c 中，随着 υ_d 的增加，端部动态在 $\upsilon_d = 0.2$ 时恢复到相对稳定的极限环。然而，在图 10.7d ~ f 中，当圆盘速度增加时端部动态开始恶化。当圆盘速度大于 0.35 时，多个圆环再次出现并且响应变得不稳定且发散。该结果符合物理直观性和图 10.2 的函数，即在较低的相对速度下摩擦力减少而在较高的相对速度下摩擦力增加。

观察整个粘滑运动，图 10.8 中的瞬时频率图给出了随着圆盘速度增加的时间-频

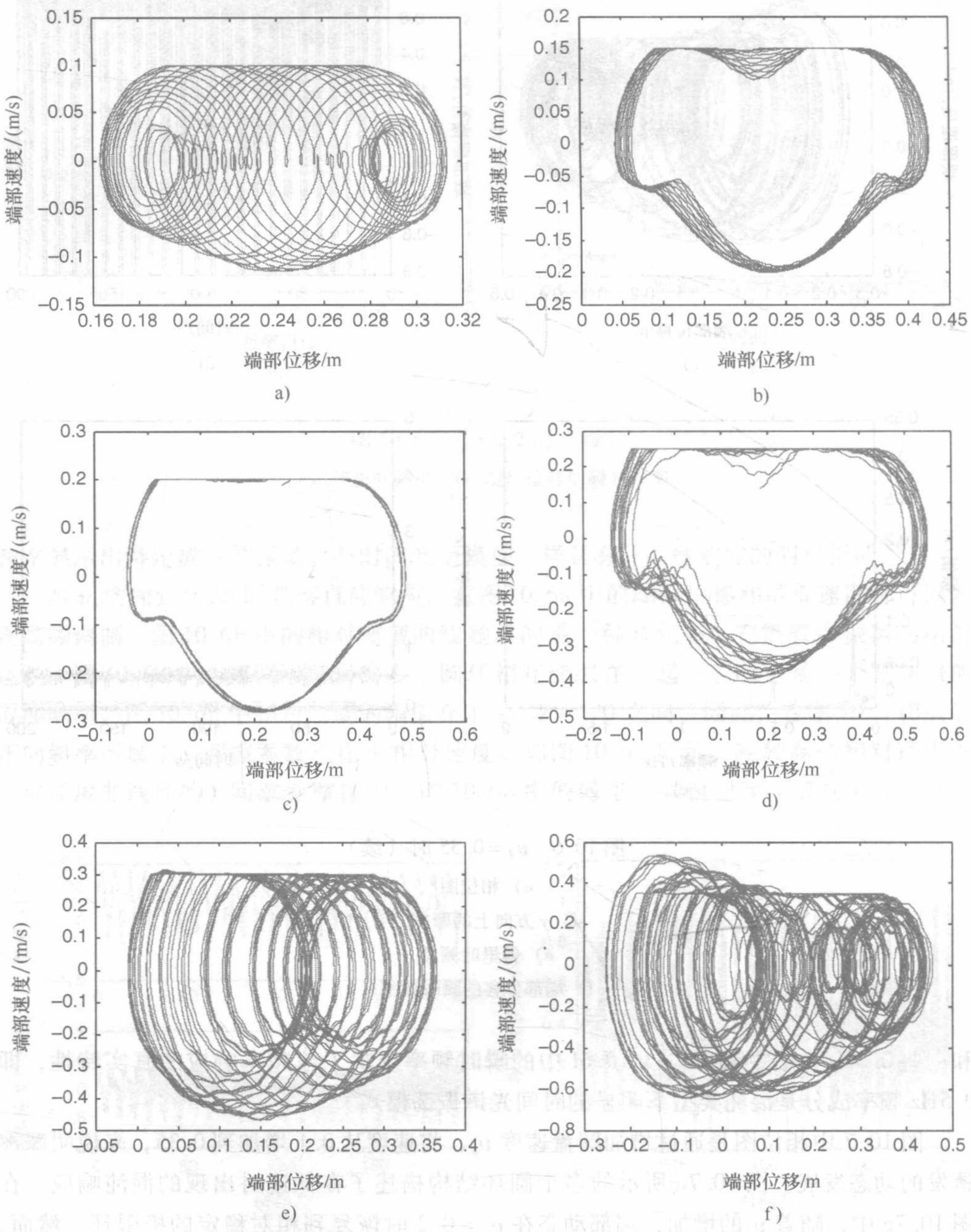


图 10.7　圆盘速度逐渐增加的摩擦诱发动态相位图

a）$v_d=0.1$　b）$v_d=0.15$　c）$v_d=0.2$　d）$v_d=0.25$　e）$v_d=0.3$　f）$v_d=0.35$

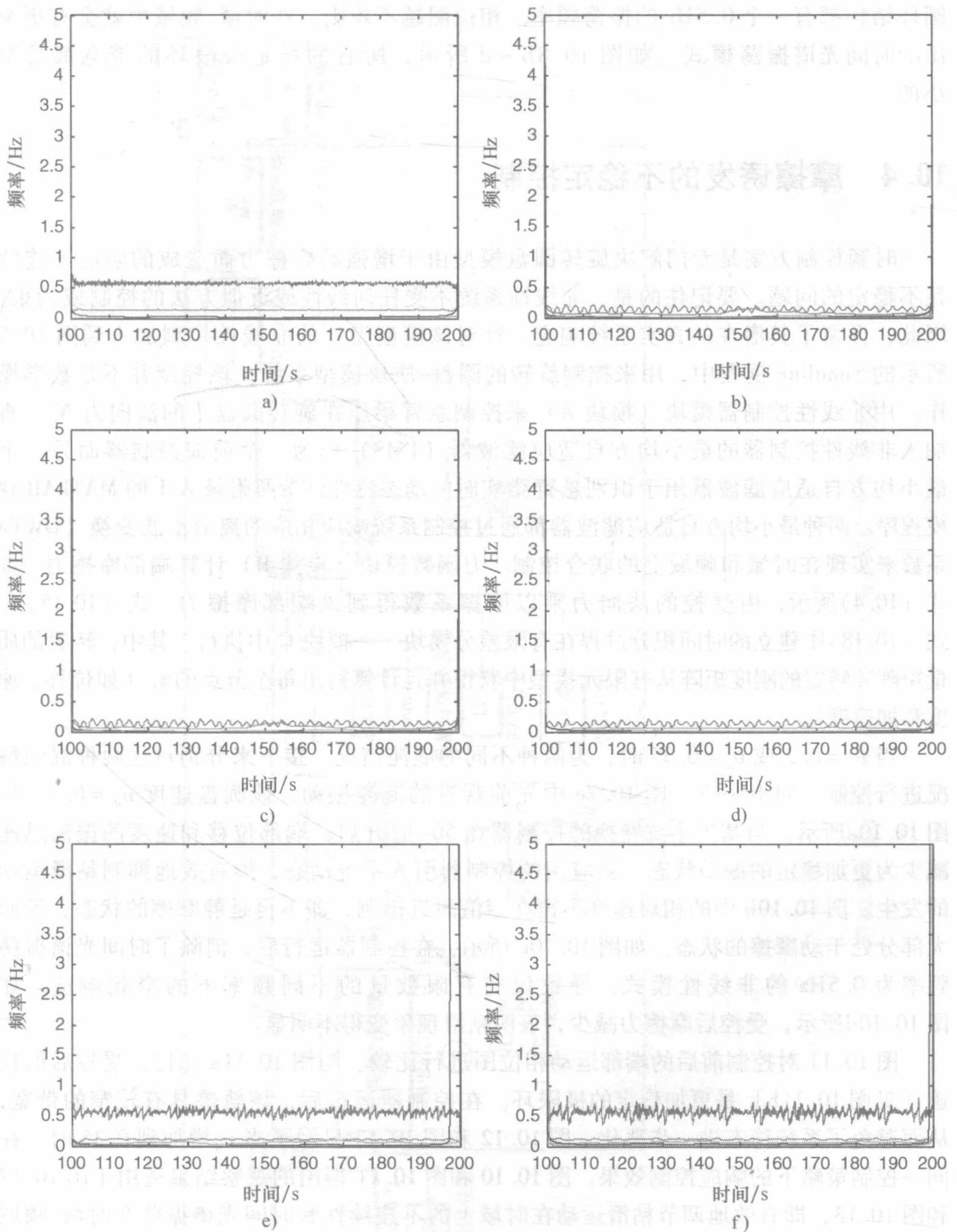


图 10.8 圆盘速度逐渐增加的摩擦诱发动态瞬时频率图

a) $v_d = 0.1$ b) $v_d = 0.15$ c) $v_d = 0.2$ d) $v_d = 0.25$ e) $v_d = 0.3$ f) $v_d = 0.35$

率响应。比较图 10.8 中的 a、e、f 和图 10.7 中相应的相位图可以看出，所有交织的圆环结构都有一个 0.5Hz 的振荡频率。相位图越不规则，在时域-频域中就会有更突出的时间光谱振荡模式。如图 10.8b ~ d 所示，所有的稳定极限环的带宽都是窄小的。

10.4 摩擦诱发的不稳定控制

时频控制方案是专门解决旋转圆盘模型由于增强动摩擦力而造成的响应不连续且不稳定的问题。要记住的是，非线性系统不受任何线性或近似方法的控制或约束，因此，保留了其潜在的真实系统响应。针对该模型设计的非线性控制加入到图 10.9 所示的 Simulink 框图中，用来控制旋转的圆盘-质块模型系统，该控制并不是数学操作。用非线性控制器模块（模块 A）来控制悬臂梁压在旋转圆盘上的法向力 N_0。将加入非线性控制器的最小均方自适应滤波器（LMS）作为一个前馈控制器而另一个最小均方自适应滤波器用于识别悬臂梁实时的动态特性。参照附录 A.1 的 MATLAB 建模程序。两种最小均方自适应滤波器都通过控制系统响应相应的离散小波变换（DWT）系数来实现在时域和频域上的联合控制。力函数模块（模块 B）计算端部摩擦力，如式（10.4)所示，由受控的法向力乘以摩擦系数得到该端部摩擦力。式（10.15）~式（10.18)中建立的时间积分过程在有限差分模块——模块 C 中执行。其中，转置的质量矩阵和转置的刚度矩阵从有限元模型中获得并且计算得出每个节点的解（如位移、速度和加速度)。

当 $v_d = 0.3$ 或 $v_d = 0.35$ 时，为两种不同的混沌情况，接下来分别对这两种混沌情况进行控制。回想一下，图 10.7e 中先前观察的混沌振动，该圆盘速度 $v_d = 0.3$。如图 10.10a所示，当基于小波变换的控制器在 50s 时开启，端部位移和速度的振荡迅速减少为更加稳定的振动状态。将应用的控制器引入系统动态，能有效地抑制粘滑运动的发生。图 10.10b 中的相对速度不再在零值附近徘徊，即不再是静摩擦的状态，反而大部分处于动摩擦的状态。如图 10.10c 所示，在控制器运行后，消除了时间光谱振荡频率为 0.5Hz 的非线性模式，导致仅有有限数量的不同频率下的窄频响应。如图 10.10d所示，受控后摩擦力减少，表明粘滑现象变得不明显。

图 10.11 对控制前后的端部运动相位图进行比较。与图 10.11a 相比，受控后的轨迹［见图 10.11b］是更加稳定的极限环。在控制器运行后，该轨迹具有较窄的带宽，从而避免了系统稳态进一步恶化。图 10.12 和图 10.13 显示了当 v_d增加到 0.35 时，在同一控制策略下的响应控制效果。图 10.10 和图 10.11 得出的观察结果适用于图 10.12 和图 10.13，即有效地调节粘滑运动在时域上的不连续性和时间光谱振荡在时域-频域中的不连续性。它们都表明基于小波变换的时频控制器能够高效地干预、中断不连续系统的动态，同时还能使系统由混沌响应恢复到动态稳定响应。

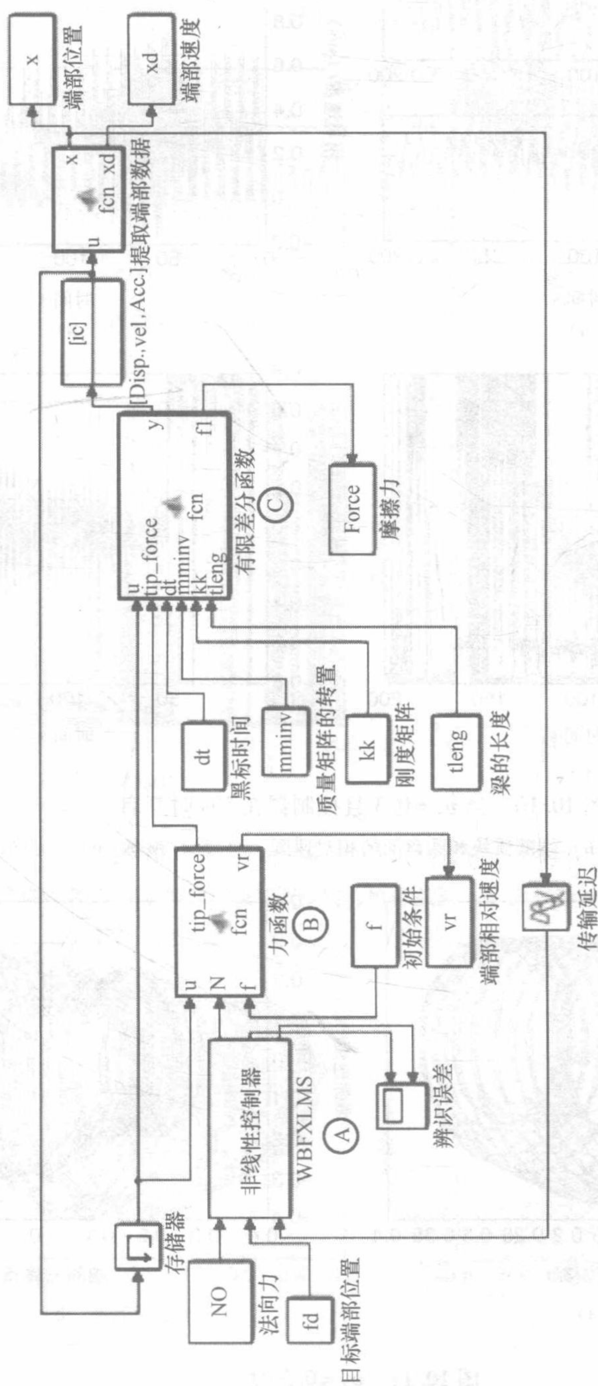


图 10.9　基于小波变换的时频控制器方案的圆盘-质块模型

a）

b）

c）

d）

图 10.10　当 $v_d = 0.3$ 且控制器在 50s 时开启

a）端部位移和速度　b）端部质块和圆盘间的相对速度　c）瞬时频率　d）y 方向的摩擦力

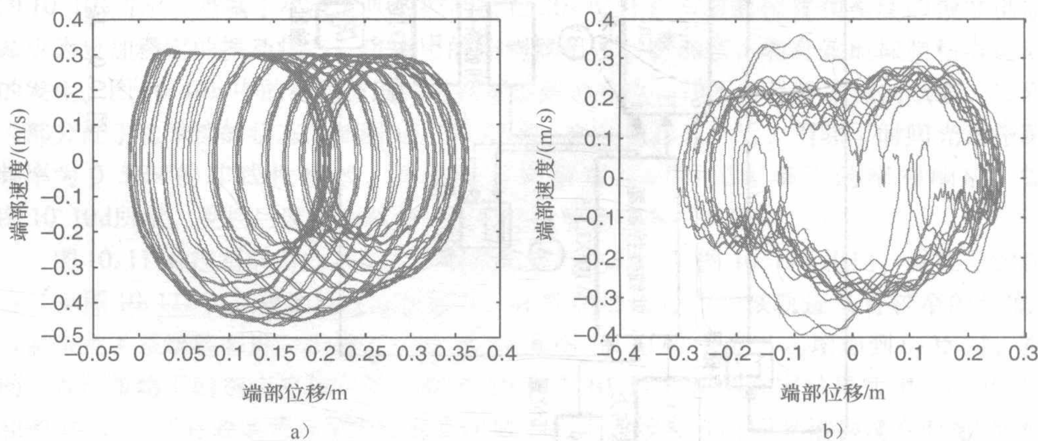


图 10.11　$v_d = 0.3$ 时

a）受控前，端部运动的相位图

b）受控后，端部运动的相位图

a）

b）

c）

d）

图 10.12　当 $v_d=0.35$ 且控制器在 50s 时开启

a）端部位移和速度　b）端部质块和圆盘间的相对速度　c）瞬时频率　d）y 方向的摩擦力

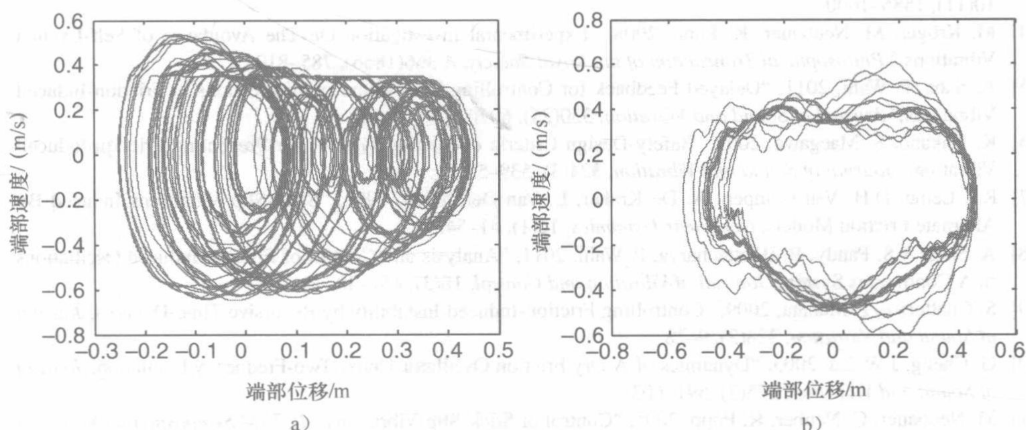


图 10.13　$v_d=0.35$ 时

a）受控前，端部运动的相位图

b）受控后，端部运动的相位图

10.5 小结

常见的摩擦动态研究是采用线性化方法或简化模型进行分析计算，本章讨论的数值研究不同于常见的摩擦动态研究，该数值研究采用有限元法和差分耦合时程积分法，提供了对摩擦振动的客观见解。粘滑现象具有明显的动态间断性并伴随着不稳定极限环和宽频混沌响应。因为没有尝试数学上精确的近似和控制，所以系统响应用含有非线性的高频分量进行调节。随着圆盘速度的增加，在时域和频域中同时出现调制频率异常和宽频带。当圆盘的角速度超过某一临界值时，该系统失稳且振荡发散。该结果与摩擦振动的物理解释相符，即该结果是高度非线性的，这是由两个运动摩擦表面的不连续所引起的。当摩擦系数与相对速度呈负相关时，自激振动生成极限环。当摩擦因数与相对速度呈正相关时，在较高相对速度下系统变得不稳定。已采用的基于小波变换的时频控制器有效地控制盘式制动器模型。该模型直接应用于没有采取非线性化和解析解的有限元模型，从而以便获取并控制摩擦动态的深层特征。控制器充分地抑制在较高相对速度下的混沌响应，并使系统恢复到相对稳定的极限环。因为该控制器是根据时域-频域所设计的，它抑制了发散振幅，同时还增加了带宽。结果表明，时频控制器是一个可行的解决方案，可用于缓解摩擦诱发的不稳定性，包括由混沌路径及摩擦振动产生的动态不连续性。

参考文献

[1] Childs, T.H.C., 2006, "Friction Modeling in Metal Cutting," *Wear*, 260(3), 310–18.

[2] Thomsen, J.J., 1999, "Using Fast Vibration to Quench Friction-Induced Oscillations," *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), 1079–1102.

[3] K. Popp, M. Rudolph, 2004, "Vibration Control to Avoid Stick-Slip Motion," *Journal of Vibration and Control*, 10(11), 1585–1600.

[4] M. Kröger, M. Neubauer, K. Popp, 2008, "Experimental Investigation On The Avoidance of Self-Excited Vibrations," *Philosophical Transaction of the Royal Society, A* 366(1866), 785–810.

[5] A. Saha, P. Wahi, 2011, "Delayed Feedback for Controlling The Nature of Bifurcations in Friction-Induced Vibrations," *Journal of Sound and Vibration*, 330(25), 6070–87.

[6] K. Nakano, S. Maegawa, 2009, "Safety-Design Criteria of Sliding Systems for Preventing Friction-Induced Vibration," *Journal of Sound and Vibration*, 324(3), 539–55.

[7] R.I. Leine, D.H. Van Campen, A. De Kraker, L. Van Den Steen, 1998, "Stick-Slip Vibrations Induced By Alternate Friction Models, *Nonlinear Dynamics*, 16(1), 41–54.

[8] A. Saha, S.S. Pandy, B. Bhattacharya, P. Wahi, 2011, "Analysis and Control of Friction-Induced Oscillations in A Continuous System, *Journal of Vibration and Control*, 18(3), 467–80.

[9] S. Chatterjee, P. Mahata, 2009, "Controlling Friction-Induced Instability by Recursive Time-Delayed, *Journal of Sound and Vibration*, 328(2), 9–28.

[10] G. Cheng, J.W. Zu, 2003, "Dynamics of A Dry Friction Oscillator Under Two-Frequency Excitation, *Journal of Sound and Vibration*, 275(3), 591–603.

[11] M. Neubauer, C. Neuber, K. Popp, 2005, "Control of Stick-Slip Vibrations," *IUTAM Symposium on Vibration Control of Nonlinear Mechanisms and Structures*, Springer, Munich, 223–32.

[12] S. Chatterjee, 2007, "Nonlinear Control of Friction-Induced Self-Excited Vibration," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(3), 459–69.

[13] L. Gaul, R. Nitsche, 2000, "Friction Control for Vibration Suppression," *Mechanical System and Signal Processing*, 14(2), 139–50.

[14] Y.F. Wang, D.H. Wang, T.Y. Chai, 2011, "Active Control of Friction-Induced Self-Excited Vibration Using Adapting Fuzzy Systems, *Journal of Sound and Vibration*, 330(17), 4201–10.

[15] M.K. Liu, C.S. Suh, 2012, "Temporal and Spectral Responses of A Softening Duffing Oscillator Undergoing Route-To-Chaos," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 17(12), 5217–28.

[16] M.K. Liu, C.S. Suh, 2012, "Simultaneous Time-FrequencyC of Bifurcation and Chaos," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 17(6), 2539–50.

[17] M.K. Liu, C.S. Suh, 2012, "On Controlling Milling Instability and Chatter At High Speed," *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 1(1), 59–72.

[18] Y.W. Kwon, D. Salinas, M.J. Neibert, 1994, "Thermally Induced Stresses in A Trilayered System, *Journal of Thermal Stresses*, 17(3), 489–506.

第 11 章　同步时频域内的混沌同步

在金属切削中，振动作为一种有害模式，是复杂的切屑形成过程中的强非线性函数，这一复杂切屑过程包括热塑性、机床刚度、再生效应和动态不连续性，如刀具和工件的间歇性接触。在第 10 章总结了与速度有关的摩擦和其导致的粘滑运动会造成显著的混沌运动。这些动态不连续的类型，其摩擦振动[1]尤其显著。抑制自持和混沌切削振动通常从混沌控制中产生激励。通过俗称为混沌同步的方法控制振动和切削稳定性是可能的。正如参考文献［2］中揭示，参考驱动模型和实际切削过程（驱动）的同步化是一个通过保持稳定的极限环来排斥振动的可行的解决方案。在联合时频域中施加并行控制的概念被用于本章来制定一种混沌同步方案，这种方案会对振动控制有广泛的影响。混沌同步方案要求非线性控制器的设计没有线性化或启发式试错。没有驱动系统参数的先验知识，无论响应系统是否受制于初始和迫使条件，同步化始终能得到实现。另外，尽管有高频噪声的施加，驱动和驱动轨迹被认为是带有可忽略不计的误差鲁棒同步。这里以混沌同步的回顾来开始本章。

11.1　混沌同步

混沌同步可以分为完全的、实用的、部分的、近似的同步[3,4]。最简单的同步方法是完全替代，它用从驱动系统[3]传来的相应的变量取代响应系统中的变量。通过只取代特定位置的变量也可以得到稳定的同步，这称为部分置换。通过增加阻尼，驱动和响应系统也能够被耦合，阻尼包含驱动和响应变量之间的差异。然而，大多数研究含有通过试错确定的同步方案的配置。

当制定混沌同步方法时，通常采用李雅普诺夫稳定性理论。设计未知参数更新的适当规则和补偿外部激励的控制法则来使李雅普诺夫候选函数符合稳定性要求[5]。对于相同或不同的混沌系统，不用附带条件的李雅普诺夫指数的运算，可以实现鲁棒同步。应用一种自适应反演控制规则来保证驱动器和响应系统之间的误差趋近稳定[6,7]。它源于每个变量序列的李雅普诺夫候选函数，从整体系统逐步倒推且确保每个变量的稳定性。为了同时鉴定混沌系统，从李雅普诺夫稳定性理论推导了自适应控制律来定义误差动态方程的收敛性和稳定性[8-10]。它能够适应未知参数和系统不确定性。用一种自适应滑模控制器来同步带有正弦驱动[11,12]的非自控系统。为使李雅普诺夫函数的导数为负数而设计的开关控制率，它的制定源于李雅普诺夫稳定性理论，用来保证在误差状态空间方程的滑模面的渐进稳定性和收敛性。得到的连续输入能承受不确定性和干扰。这是所有同步方法的公共特性。然而，制定的控制规则既不是直觉的，也没有自己可靠的物理解释。另外，它们要求系统结构和参数要明确知道。这一要求对于非自控和非稳定系统更具有强

制性，所以，可以适当地设计这一控制规则来取消外部的强迫。李雅普诺夫函数需要建立在启发式方法的基础上，且只适用于相对简单的系统。因此，基于李雅普诺夫稳定性理论的方法不适用于未知或未指定性质的复平面、非稳定的系统。

线性控制理论也被用于混沌同步。两个不同的混沌系统通过分配恰当的控制律使误差动态方程线性化[13,14]而同步。线性稳定理论，如计算状态矩阵的特征值，被用来定义稳定性。线性反馈控制被用于同步两个相同的混沌系统[15]。这一系统被雅克比线性化了，且 Routh- Hurwitz 稳定性判据紧接着就确定反馈增益来抑制不稳定平衡点的混沌。两个线性耦合混沌系统通过赋予满足 Routh- Hurwitz 稳定性判据[16]的合适的参数来达到同步。特定结构的同步方法不是通过选择特定的驱动-响应混沌系统对而设计了一种线性误差动态方程，就是对状态矩阵采用雅克比。然而，只能获得一个有限的驱动-响应对的线性误差动态方程，而系统的不确定性却得不到。因此，它基本上是一个带有有限适用性的试错法。雅克比事实上是一种线性化方法，只适用于预设的固定点的邻近区域。它对扰动的灵敏性表现为它只适用于稳定系统。对于非平稳的系统，一旦轨迹偏离了固定点，稳定性就失效了。

本章也表述了时滞微分方程的同步，包括单向耦合同步的带有非线性时滞反馈的相同耗散混沌系统[17]。通过计算李雅普诺夫指数来分析估计耦合时滞混沌系统的同步阈值[18]。时滞反馈增加到了对两个相同的 Lur 系统进行同步的控制规则中，这一同步利用李雅普诺夫稳定性原理来确保稳定性[19-21]。然而，延迟时间通常是启发式的决定。如果多个变量需要传递给响应系统，可以利用同步替换来定义一个新的变量作为多变量的函数[22]。新的变量传递给响应系统且可通过逆变换来恢复。参考文献［23］中非自控混沌系统的同步化详述了驱动和响应系统的不同阶段的相同正弦扰动项。利用选通信号组成一个反馈回路和调制函数发生器的频率为响应电路提供正弦激励。通常，晚期的混沌同步方法虽然有作用，但只对明确的情况下有有限的应用。

11.2　非自控的混沌系统的动力学

第 7 章所述的基于小波的时频控制应用在下面部分，来同步受制于不同外部激励的非自控混沌电路[23]。这个电路是被周期扰动的混沌系统，相较于自控系统，它卓越的特性是对噪声不敏感，它受控于下面三个方程系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\beta(y-z) \tag{11.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\beta(-\Gamma_y y-g(x)+\alpha\cos(\omega t)) \tag{11.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\beta(f(x)-\Gamma_z z) \tag{11.3}$$

式中

$$g(x)=-3.8+(1/2)(|x+2.6|+|x-2.6|+|x+1.2|+|x-1.2|) \tag{11.4}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x+|x-1|-|x+1| \tag{11.5}$$

$g(x)$ 和 $f(x)$ 是基于二极管函数发声器的分段线性函数。参数 $\alpha=0.2$，$\Gamma_y=0.2$，$\Gamma_z=0.1$，$\beta=10^4$，$\omega=2\pi f_d$ 且线性受迫振动频率 $f_d=769\text{Hz}$[23]。电路是用时间步长为 0.0001s 且受制于初始条件为 $(x\quad y\quad z)=(0\quad 0\quad 0)$ 的数字时间积分。图 11.1 展示了在 $x-y$、$x-z$ 和 $y-z$ 平面的混沌响应的相图和 Poincaré 映射。

图 11.1a ~ c 的相位图中相互交叠的类极限环轨迹，代表一个有限频谱带宽的非平稳

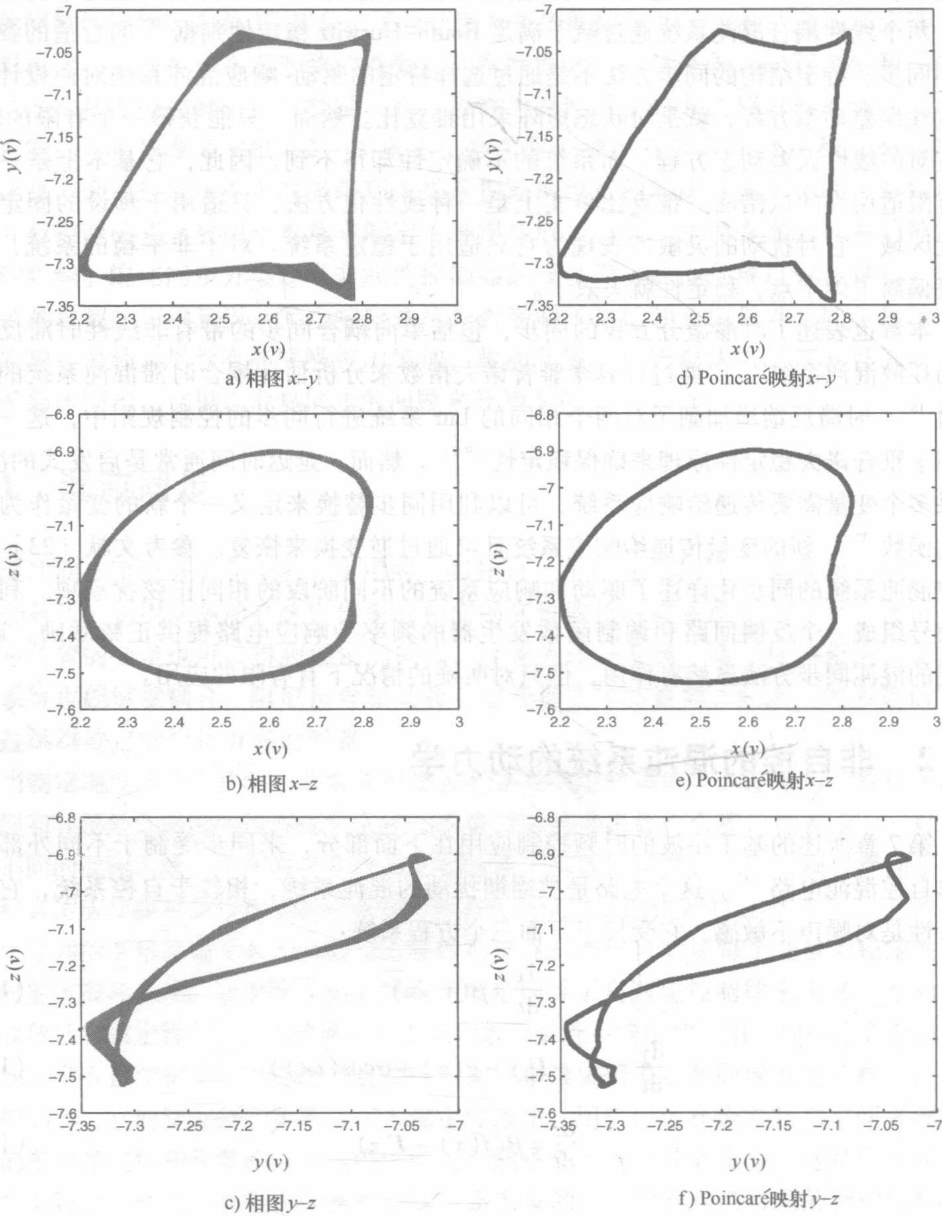


图 11.1　相图（左）和 Poincaré 映射图（右）

的频率振荡；图 11.1d~f 的映射表明在各个维度的分形结构。为了解决图中所示的非自控混沌电路的隐藏的非线性，伴随着边际频谱的瞬时频率（IF）在接下来得到应用。

图 11.2a 所示 x 轴向运动的 IF 展示了伴随着其他变形不规则模式的第一频率模式

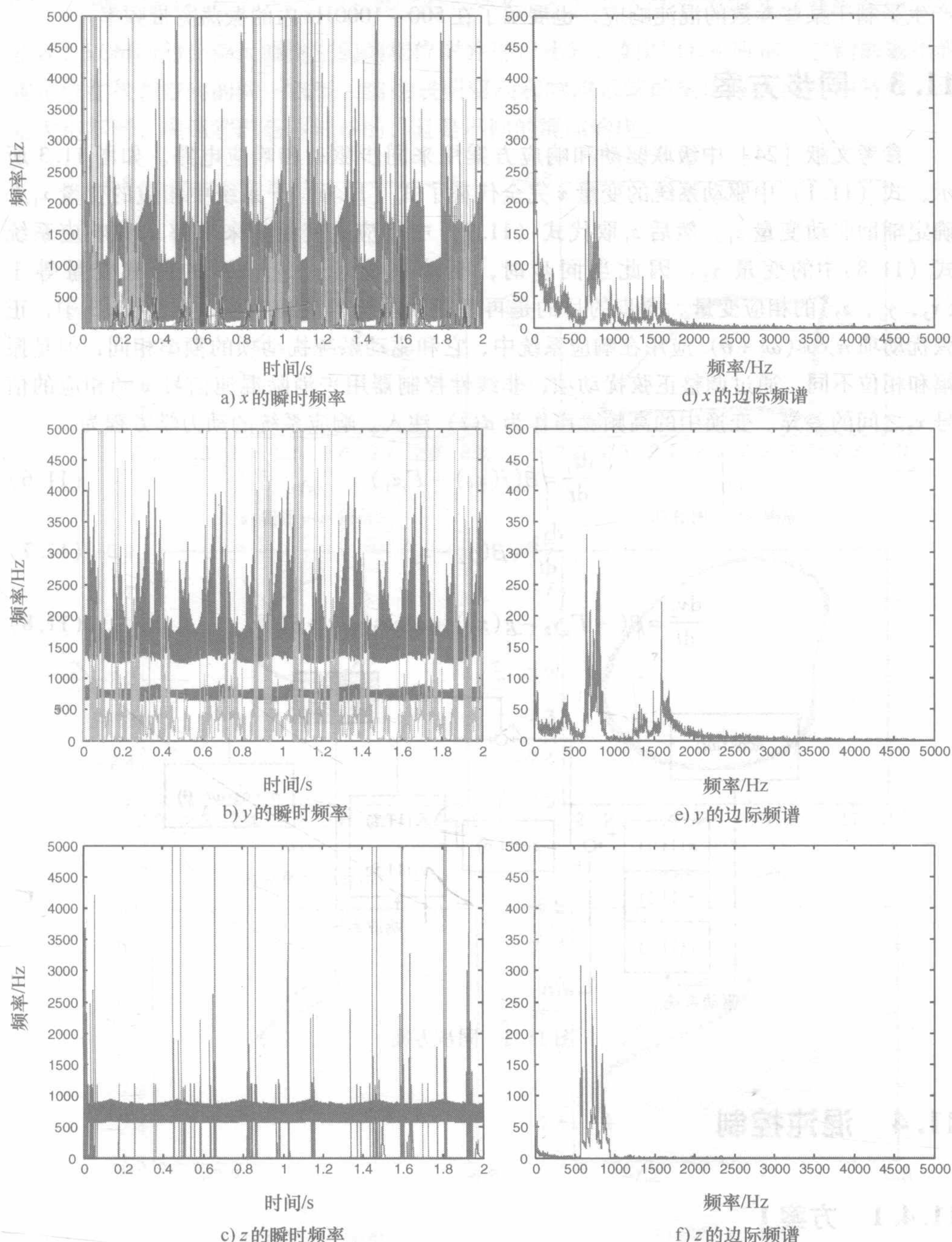


图 11.2　瞬时频率（IF）（左）和边际频谱（右）

的显著时间振荡。图 11.2d 中相应的边际频谱表明了高达 2500Hz 的宽频带响应和 500～1000Hz 的频率簇。图 11.2b 和 e 中 y 轴向运动的 IF 和边际频率与 x 轴向运动的情况类似，都演示了 IF 和宽边际频谱的时间振荡。图 11.2c 和 f 同样地表明非自控电路产生受制于某些参数的混沌响应，也展示了在 500～1000Hz 内的振荡宽带频率。

11.3 同步方案

参考文献［24］中级联驱动和响应方案用来同步驱动和响应电路。如图 11.3 所示，式（11.1）中驱动系统的变量 x 完全代替了式（11.6）子系统中相应的变量 x_1 来确定辅助驱动变量 z_1。然后 z_1 取代式（11.7）中相应的变量 z_2 来求解 x_2 和响应系统式（11.8）中的变量 y_2。因此当同步时，驱动系统（x，y，z）的所有变量等于（x_2，y_2，z_2）的相应变量。同步的目的是再现驱动系统的混沌响应。在图 11.3 中，正弦扰动项 $\alpha_r\cos(\omega t+\theta)$ 应用在响应系统中，它和驱动系统扰动项的频率相同，但是振幅和相位不同。通过调整正弦扰动项，非线性控制器用来消除混沌信号 x 和相应的信号 x_2 之间的差异。变换中的高频噪声作为 $d(t)$ 注入。响应系统的动力学方程为

$$\frac{dz_1}{dt}=\beta(f(x_1)-\Gamma_z z_1) \tag{11.6}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\beta(y_2-z_2) \tag{11.7}$$

$$\frac{dy_2}{dt}=\beta(-\Gamma_y y_2-g(x_2)+\alpha_r\cos(\omega_r t+\theta)) \tag{11.8}$$

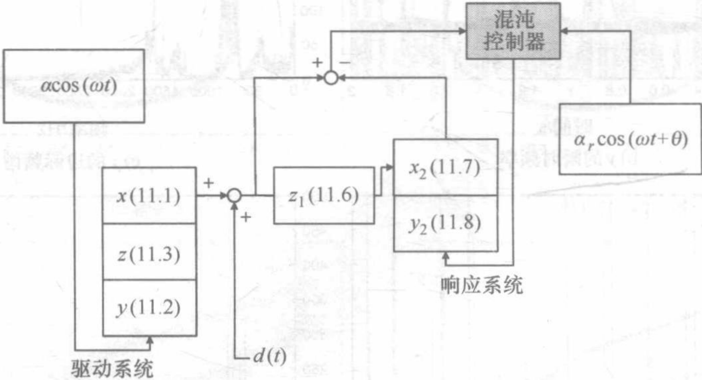


图 11.3 同步方案

11.4 混沌控制

11.4.1 方案 1

驱动和响应系统受制于不同的初始条件与不同振幅和相位的驱动力。式（11.1）～

式（11.3）的混沌电路是驱动系统，变量 x 传输到式（11.6）~式（11.8）定义的响应系统。为响应系统指定的初始条件是（x，y，z）=（2，2，2），且驱动项设置为 $\alpha_r\cos(2\pi\omega_d+\theta)$，其中 $\alpha_r=0.4$，$\omega_d=769$ 且 $\theta=\frac{\pi}{2}$。为了观察驱动和响应系统之间的差异，以相同的比例尺画出它们的相位图并进行比较，如图11.4所示。它们的输出轨迹定位在状态空间的同一流域。结果表明驱动和响应系统的输出具有同样的特性，但是大小不同，表明它们是不同步的，且是不同的混沌响应。

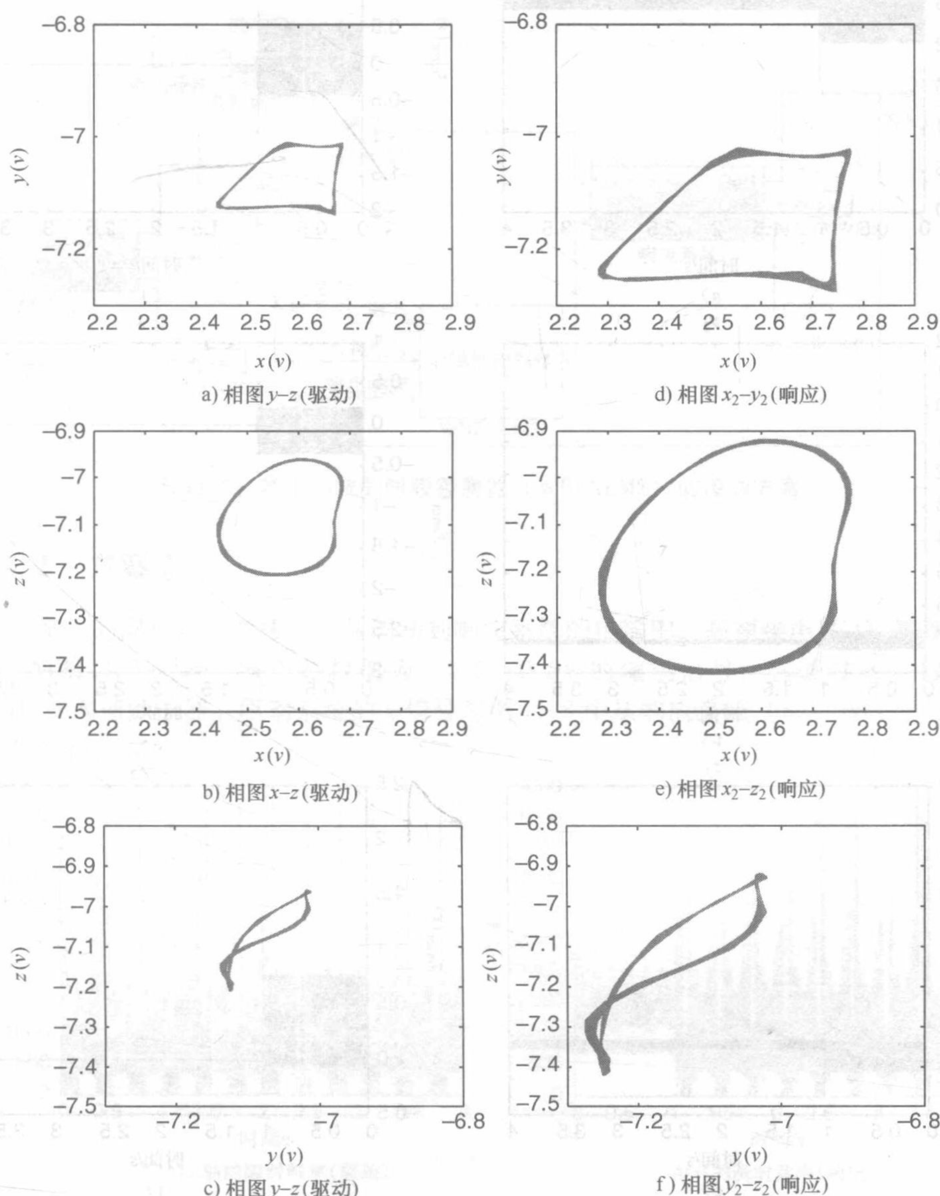


图11.4 驱动器输出（左）和响应（右）系统的相图

部署第一分解水平的 Daubechies-3（db3）小波来构建变换矩阵 $\boldsymbol{T}$（见第7章）。当前可能发生的同步问题的控制方案如图 11.6 所示，以框图的形式给出，其中基于小波的时频控制器标识为 WBFXLMS。附随的 MATLAB 模型代码参考附录 A.2。图 11.5 左栏

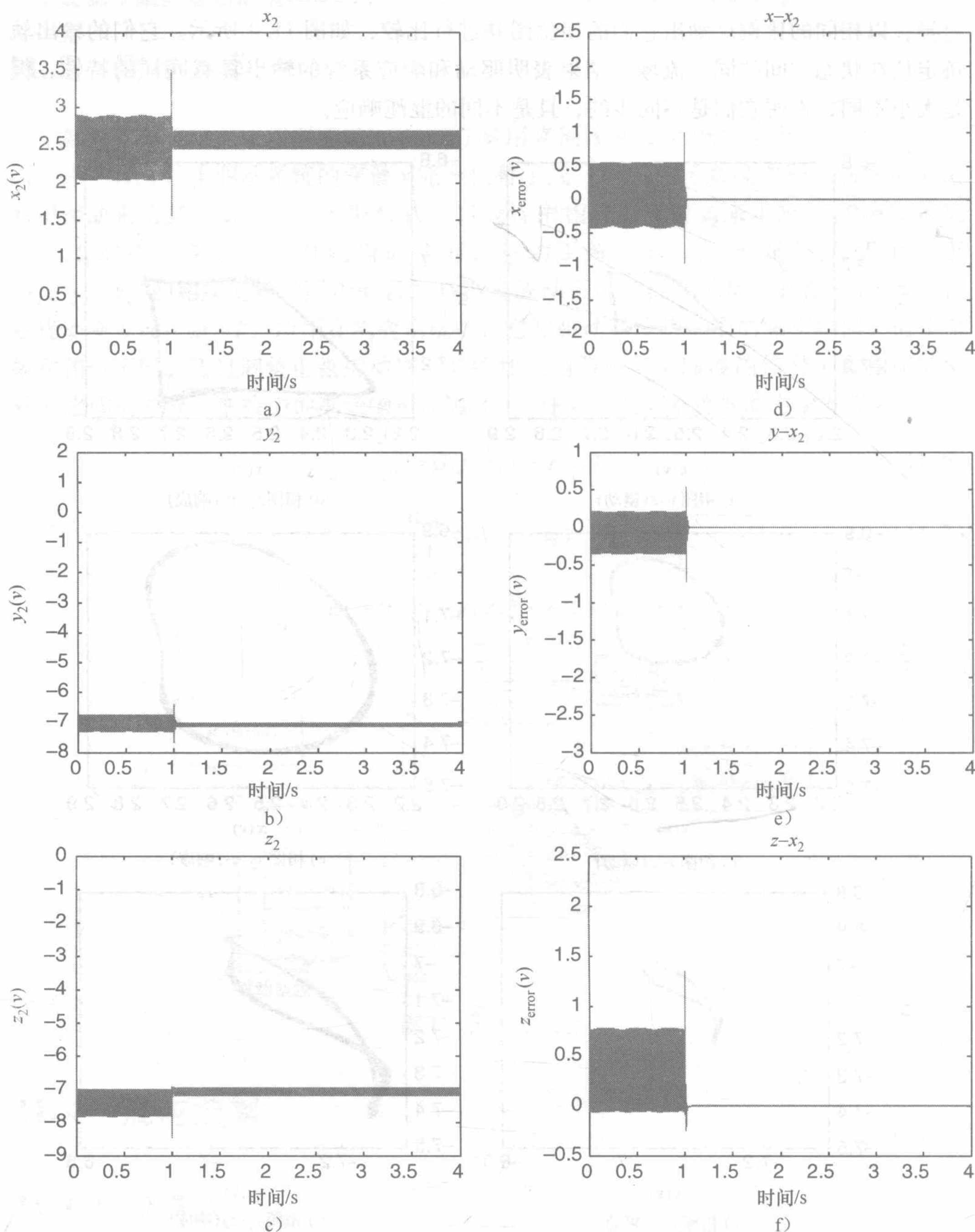


图 11.5　在 1s 处施加控制器的响应（左）；驱动和响应信号之间的误差（右）

给出了响应系统的输出。当在1s标志处打开控制器，经过短暂的瞬态，响应系统的输出收敛到匹配驱动系统的输出。右栏的三个图表明在控制器联机后，驱动系统和响应系统之间的误差减少到接近于零。为了监测控制器对频率响应的影响，图11.7右栏的受控响应信号的瞬时频率（IF）与此图上左栏的驱动信号相比较。为了清晰，只说明了第一个或前两个频率模式。可以看出，控制器在1s处启动后，响应信号的IF恢复到以很高的保真度追踪驱动信号。两个振荡器共享IF特性，这是一个强烈的迹象：在时域和频域，基于小波的控制器都能非常有效地以明显的契合和准确度来同步驱动和响应系统。

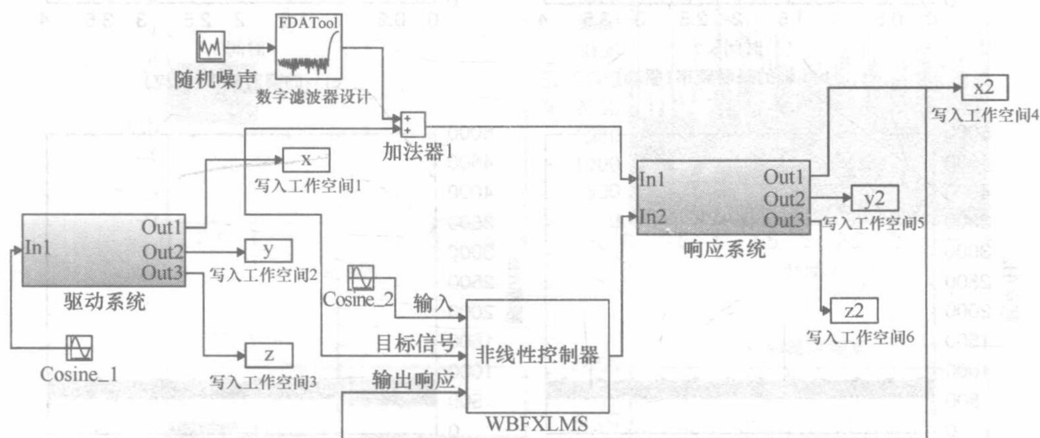


图 11.6　基于小波的时频控制器（WBFXLMS）的控制方案

11.4.2　方案 2

方案1的同步重新考虑了在从驱动到响应系统的传输中，高频噪声 $d(t)$ 被加入变量 x，如图11.3所示。噪声是幅值为 -0.5 ~ 0.5V 的随机信号，它通过截止频率为4800Hz的高通滤波器。驱动系统的 x 信号与图11.8中从响应系统（x_d）接收到的加扰噪声信号相比较。

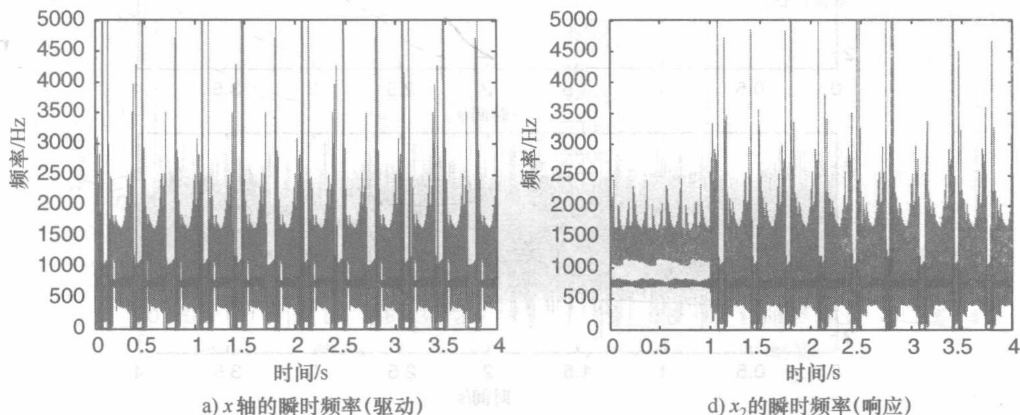


图 11.7　驱动信号的瞬时频率（左）；响应信号的瞬时频率（右）

b) y 轴的瞬时频率（驱动）

e) y_2 的瞬时频率（响应）

c) z 轴的瞬时频率（驱动）

f) z_2 的瞬时频率（响应）

图 11.7　驱动信号的瞬时频率（左）；响应信号的瞬时频率（右）（续）

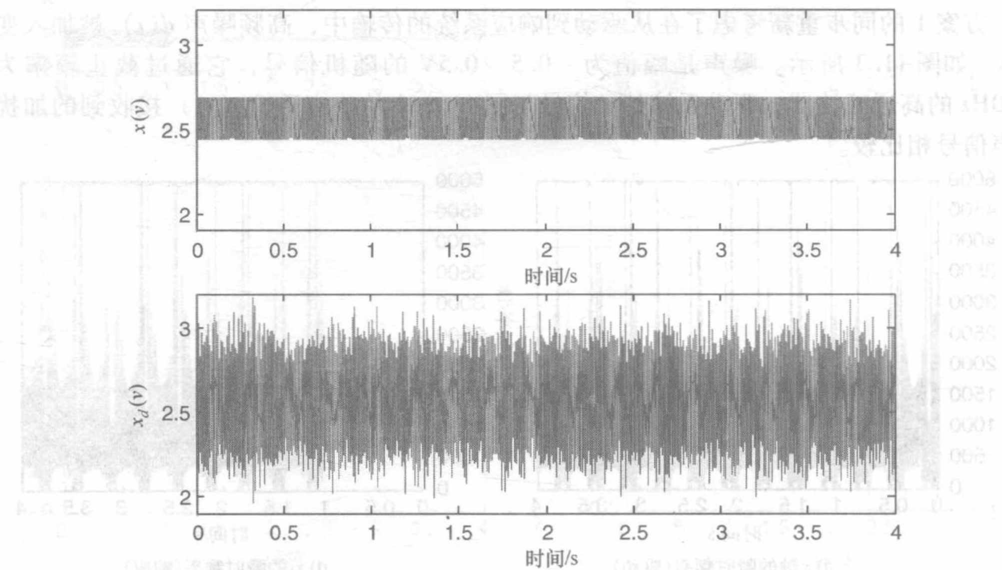


图 11.8　驱动系统的信号 x 和响应系统获取的信号 x_d

图 11.9a ~ c 给出了驱动系统中变量和响应系统中变量之间的差异。尽管在传输过程中驱动信号 x 已被高频噪声污染，驱动和响应信号的时域误差仍然被充分约束在一个可忽略的范围内，这一现象可以被理解为是实际同步[3]。图 11.9d ~ f 中频谱恢复到与图 11.7a ~ c 中驱动系统的频谱有相同的带宽，尽管不确切知道驱动信号频谱特性。同步的结果，不受传播噪声的影响，显示了混沌同步方案的鲁棒性的水平。

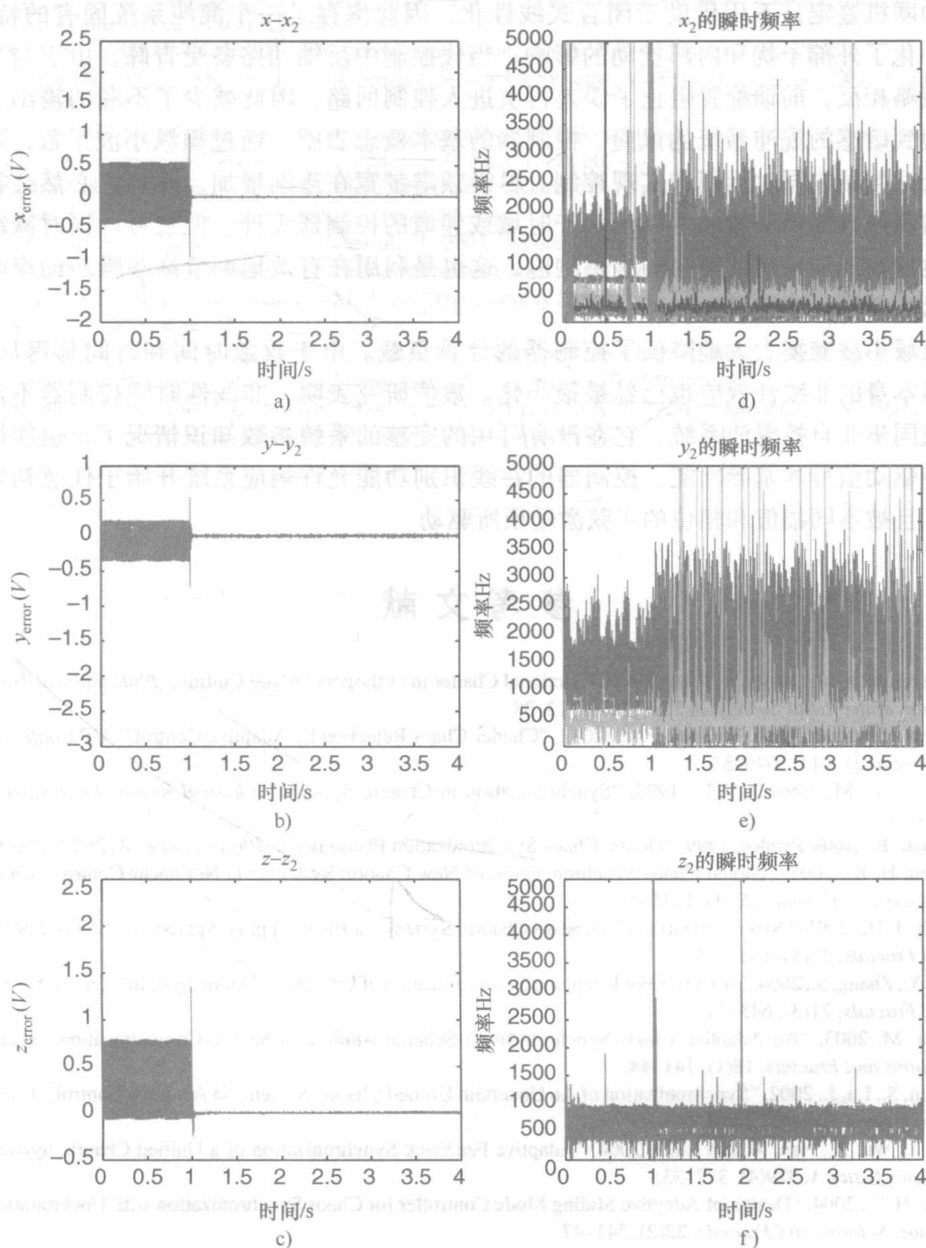


图 11.9　驱动和响应信号之间的差异（左）；响应信号的瞬时频率（右）

11.5 小结

不像其他的控制器主要集中在减少时域误差，基于小波变换的时频控制方案的目标是当系统由不平稳走向混沌过程时减缓异常频率。并行自适应滤波器配置允许未知参数的联机鉴定，不用借助于闭合式线性化，因此保存了一个混沌系统固有的特性，且最小化了外部干扰和内部扰动的影响。当代控制中反馈回路备受青睐，由于与当代控制策略相反，前馈配置阻止了误差再次进入控制回路，因此减少了不利的输出无意中刺激到敏感的混沌系统的风险。控制器的基本概念表明，通过操纵小波系数，可以在联合时频域中同时运用和实现控制。尽管频谱带宽在逐渐增加，并且它必然会被证明是错误的且提供失效的常见的基于时域或频域的控制器设计，但它可以同时减缓和适当地抑制混沌系统的时间和频率响应。这也是利用在有效地调节高频噪声的影响中所展示的鲁棒性来证明的。

时域小波变换大大地降低了控制器的计算负载。由于收敛时间和时间延迟加快，控制器本身的非线性效应也已经被最小化。数值研究表明，非线性时频控制器不仅在时间域同步非自控混沌系统。它在没有可用的完整的系统参数知识情况下，也能恢复频域中驱动信号的基础功能。控制器的在线识别功能允许响应系统开始于任意初始条件处，且被不同幅值和相位的正弦激励项所驱动。

参考文献

[1] Wiercigroch, M., Krivtsov, A.M., 2001, "Frictional Chatter in Orthogonal Metal Cutting," *Philosophical Transaction of the Royal Society*, A 359(1781), 713–38.

[2] Prian, M., Lopez, M.J., Verdulla, F.M., 2012, "Chatter Chaos Rejection by Adaptive Control," *AIP Conference Proceedings*, 1431, 676–83.

[3] Pecora, L. M., Carroll, T. L., 1990, "Synchronization in Chaotic Systems," *Physical Review Letters*, 64(8), 821–24.

[4] Femat, R., Solís-Perales, 1999, "On the Chaos Synchronization Phenomena," *Physics Letter A*, 262(1), 50–60.

[5] Chen, H. K., 2005, "Global Chaos Synchronization of New Chaotic Systems via Nonlinear Control," *Chaos, Solitons and Fractals*, 23(4), 1245–51.

[6] Park, J. H., 2006, "Synchronization of Genesio Chaotic System via Backstepping Approach," *Chaos, Solitons and Fractals*, 27(5), 1369–75.

[7] Yu, Y., Zhang, S., 2004, "Adaptive Backstepping Synchronization of Uncertain Chaotic System," *Chaos, Solitons and Fractals*, 21(3), 643–49.

[8] Feki, M, 2003, "An Adaptive Chaos Synchronization Scheme Applied to Secure Communication," *Chaos, Solitons and Fractals*, 18(1), 141–48.

[9] Chen, S., Lu, J., 2002, "Synchronization of An Uncertain Unified Chaotic System via Adaptive Control," *Chaos, Solitons and Fractals*, 14(4), 643–47.

[10] Lu, J., Wu, X., Han, X. and Lü. J, 2004, "Adaptive Feedback Synchronization of a Unified Chaotic System," *Physics Letter A*, 329(4), 327–33.

[11] Yau, H. T., 2004, "Design of Adaptive Sliding Mode Controller for Chaos Synchronization with Uncertainties," *Chaos, Solitons and Fractals*, 22(2), 341–47.

[12] Huang, C. F., Cheng, K. H., Yan, J. J., 2008, "Robust Chaos Synchronization of Four-Dimensional Energy Resource System Subject to Unmatched Uncertainties," *Communications in Nonlinear Science and Numerical*

Simulation, 14(6), 2784–92.

[13] Park, J. H., 2006, "Chaos Synchronization between Two Different Chaotic Dynamical Systems," *Chaos, Solitons and Fractals*, 27(2), 549–54.

[14] Yassen, M. T., 2005, "Chaos Synchronization between Two Different Chaotic Systems Using Active Control," *Chaos, Solitons and Fractals*, 23(1), 131–40.

[15] Yassen, M.T., 2005, "Controlling Chaos and Synchronization for New Chaotic System using Linear Feedback," *Chaos, Solitons and Fractals*, 26(3), 913–20.

[16] Lü, J., Zhou, T., Zhang, S., 2002," Chaos Synchronization between Linearly Coupled Chaotic Systems," *Chaos, Solitons and Fractals*, 14(4), 529–41.

[17] Voss, H.U., 2000, "Anticipating Chaotic Synchronization," *Physical Review E*, 61(5), 5115–19.

[18] Pyragas, K., 1998, "Synchronization of Coupled Time-delay Systems: Analytical Estimations," *Physical Review E*, 53(3), 3067–71.

[19] Liao, X., Chen, Guanrong, 2003, "Chaos Synchronization of General Lur's Systems via Time-Delay Feedback Control," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(1), 207–31.

[20] Cao, J., Li, H. X., Ho, W. C., 2005, "Synchronization Criteria of Lur's Systems with Time-Delay Feedback Control," *Chaos, Solitons and Fractals*, 23(4), 1285–98.

[21] Yalçin, M. E., Suykens, J. A. K., Vandewalle, J., 2001, "Master-Slave Synchronization of Lur'e Systems with Time-Delay," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 11(6), 1707–22.

[22] Carroll, T. L., Heagy, J. F., Pecora, L. M., 1996, "Transforming Signals with Chaotic Synchronization," *Physical Review E*, 54(5), 4676–80.

[23] Carroll, T. L., Pecora, L. M., 1993, "Synchronizing Nonautonomous Chaotic Circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 40(10), 646–50.

[24] Pecora, L. M., Carroll, T. L., Johnson, G. A., Mar, D. J., Heagy, J. F., 1997, "Fundamentals of Synchronization in Chaotic Systems, Concepts and Applications," *Chaos*, 7(4), 520–43.

附录　非线性时频控制的 MATLAB 编程实例

本附录中列出了两个关于非线性时频控制实施的 MATLAB 例子。MATLAB 是由美国 MathWorks 公司开发的数值计算平台，它在高度开放的环境中集成了可视化编程并创建了用户界面。两个例子都有一个主程序编码，即为 MATLAB 的 m 文件，它调用 MATLAB Simulink。Simulink 是动态系统设计和建模的图形化多域仿真工具。程序初始化、参数和系数的分配及数据的传输和存储都在 m 文件中执行。受控的带有 plant 的系统模型构建在 Simulink 中，追随基于模型的设计。非线性时频控制器在 Simulink 中开发且置于用户定义的被称作 API 的 S 函数的模块。MATLAB 提供每个子系统和控制器之间的无缝信号传输和存储。第 10 章中摩擦引起的不稳定控制的实施和第 11 章中的混沌同步分别通过下面部分的例子来演示。

A.1　摩擦引起的不稳定控制

查阅第 10 章中式（10.5）~式（10.18）。运用有限元法（FEM）来计算悬臂梁中每个元素节点的位移，悬臂梁与旋转圆盘有物理上的连接。位移场确定之后，接着用有限差分法来估算每个节点相应的速度和加速度，定义见式（10.15）~式（10.18）。系数的初始化、有限元模型中质量和刚度矩阵的配置与小波变换矩阵的构建都在主 m 文件中实施。相应的 Simulink 模型由主程序启动，而且在每个时间步长内完成有限元的计算。Simulink 模型的架构见图 10.9。为了清晰可见，这张图在该节的图 A.3 中得到放大和再现。

A.1.1　主程序

主程序编码为如下的一个 m 文件。Simulink 系统模型 BEAM_5 由主程序调用。

```
==========================================================
clear all; close all; clc;
% Assign model coefficients
N0 = 2;          % externally applied normal load
us = 0.4;        % the maximum coefficient of static friction
um = 0.25;       % the minimum coefficient of kinetic friction
vm = 0.5;        % velocity corresponding to um
vs = 10^-4;      % velocity corresponding to us
vd = 0.3;        % velocity of the disk
rm = 0.8;        % coefficient in eqn. (10.3)
tk = 100000;     % coefficient in arctan
```

```
f = [N0 us um vm vd rm tk vs];

% Assign coefficients for the finite element analysis
nel = 10;       % number of elements
nnel = 2;       % number of nodes per element
ndof = 2;       % number of dofs per node
nnode = (nnel-1)*nel + 1;     % total number of nodes in system
sdof = nnode*ndof;      % total system dofs
tleng = 1;  % total beam length
leng = tleng/nel;       % same size of beam elements
kk = zeros(sdof,sdof);      % initialization of system stiffness matrix
mm = zeros(sdof,sdof);      % initialization of system mass matrix
force = zeros(sdof,1);      % initialization of force vector
index = zeros(nel*ndof,1);  % initialization of index vector

% Assign simulation coefficients in Simulink
dt = 10^-4;     % time step size
ti = 0;         % initial time
tf = 200;       % final time
nt = fix((tf-ti)/dt);   % number of time steps
TC = 50;        % controller start time
fd = 0;         % desire tip position

% Construct system matrix(M,K,F) by finite element method
for iel = 1:nel     % loop for the total number of elements
index = feeldof1(iel,nnel,ndof);   % extract system dofs associated with element
% Assign element mass matrix
m = rm*leng/420*[156   22*leng   54   -13*leng;...
22*leng   4*leng^2   13*leng   -3*leng^2;...
54   13*leng   156   -22*leng;...
-13*leng   -3*leng^2   -22*leng   4*leng^2];
% Assign element stiffness matrix
k = 1/(leng^3)*[12   6*leng   -12   6*leng;...
6*leng   4*leng^2   -6*leng   2*leng^2;...
-12   -6*leng   12   -6*leng;...
6*leng   2*leng^2   -6*leng   4*leng^2];

kk = feasmbl1(kk,k,index);  % assemble each element matrix into system matrix
```

```
mm = feasmbl1(mm,m,index); % assemble each element matrix into system matrix
end

% Add unit mass at tip
mm(end,end) = mm(end,end) + 1;
mm(end-1,end-1) = mm(end-1,end-1) + 1;
mminv = inv(mm); % invert the mass matrix

% Initialize acceleration,velocity and displacement at current time step
acc = zeros(sdof,1);
vel = zeros(sdof,1);
disp = zeros(sdof,1);

% Initialize acceleration,velocity and displacement at next time step
acc_1 = zeros(sdof,1);
vel_1 = zeros(sdof,1);
disp_1 = zeros(sdof,1);

% Initialize tip frictional force by eqn. (10.4)
vr = vd -0;
if abs(vr) < vs
force(end-1) = N0*(us*vr/vs);
else
force(end-1) = N0*tanh(tk*vr)*(us-3/2*(us-um)*((abs(vr)-vs)/(vm-vs)-
1/3*(abs(vr)-vs)/(vm-vs))^3);
end

% force(1) = -1*force(end-1);
% force(2) = force(end-1)*tleng;
% Calculate the acceleration when the frictional force is applied
acc = mminv*(force-kk*disp);  % acc. = (f-kx)/m
acc(1) = 0;           % transverse displ. at node 1 is constrained
acc(2) = 0;           % slope at node 1 is constrained
ic = [disp vel acc]; % assign initial condition

% Construct the matrix of orthogonal WT by eqn. (7.12)
% Daubechies-2(db4)wavelet
% Level 1 decomposition
```

```
N1 =512; % length of the adaptive filter
h0 =1/(4*sqrt(2))*[1 +sqrt(3)3 +sqrt(3)3-sqrt(3)1-sqrt(3)]; % high pass filter
g0 =1/(4*sqrt(2))*[1-sqrt(3)-3 +sqrt(3)3 +sqrt(3)-1-sqrt(3)]; % low pass filter

% Construct wavelet transformation matrix
WT = zeros(N1);
for n =1:N1/2
  if n == N1/2
    WT(n,N1-1:N1) =h0(1:2);
    WT(n,1:2) =h0(3:4);
    WT(n +N1/2,N1-1:N1) =g0(1:2);
    WT(n +N1/2,1:2) =g0(3:4);
  else
    WT(n,2*n-1:2*n +2) =h0;
    WT(n +N1/2,2*n-1:2*n +2) =g0;
  end
end

% Invoke Simulink
sim('BEAM_5');

% Display the simulation result
[m,n] =size(x);
time =0:dt:(m-1)*dt;
figure;
plot(time,Force)
xlabel('Time(sec)','FontSize',12)
ylabel('Force','FontSize',12)
title('Tip Frictional Force','FontSize',12)

figure;
subplot(2,1,1)
plot(time,x)
xlabel('Time(sec)','FontSize',12)
ylabel('Tip displacement(m)','FontSize',12)
% title('Tip','FontSize',12)

subplot(2,1,2)
```

```
plot(time,xd)
xlabel('Time(sec)','FontSize',12)
ylabel('Tip velocity(m/s)','FontSize',12)
% title('Tip','FontSize',12)

figure;
plot(time,vr)
xlabel('Time(sec)','FontSize',12)
ylabel('Relative velocity(m/s)','FontSize',12)
title('Relative velocity','FontSize',12)

figure;
plot(x(end/2:end),xd(end/2:end))
% title('Phase Plot','FontSize',12)
xlabel('Tip displacement(m)','FontSize',12)
ylabel('Tip velocity(m/s)','FontSize',12)
% ylim([-0.5 0.5]);
```

==

下面的两个 MATLAB 函数由上面的主函数调用。它们采纳自 CRC 出版社，1997 年，Kwon，Y. W. 和 Bang，H. 的 The Finite Element Method Using MATLAB 中的示例代码。

==

```
function [index] = feeldof1(iel,nnel,ndof)
% Purpose:
% Compute system dofs associated with each element in one-dimensional
% problem
%
% Synopsis:
% [index] = feeldof1(iel,nnel,ndof)
%
% Variable Description:
% index - system dof vector associated with element "iel"
% iel - element number whose system dofs are to be determined
% nnel - number of nodes per element
% ndof - number of dofs per node

edof = nnel * ndof;
start = (iel-1) * (nnel-1) * ndof;
```

```
for i = 1:edof
   index(i) = start + i;
end

function [kk] = feasmbl1(kk,k,index)
% Purpose:
% Assembly of element matrices into the system matrix
%
% Synopsis:
% [kk] = feasmbl1(kk,k,index)
%
% Variable Description:
% kk - system matrix
% k - element matrix
% index - d. o. f. vector associated with an element

edof = length(index);
for i = 1:edof
   ii = index(i);
   for j = 1:edof
      jj = index(j);
         kk(ii,jj) = kk(ii,jj) + k(i,j);
   end
end
=====================================================================
```

A. 1. 2　Simulink 模型

介绍了两个定制的 MATLAB 功能模块：图 A. 1 的有限差分函数和图 A. 2 的力函数。非线性时频控制器和有限元方法的迭代在 Simulink 中得到实施，如图 A. 3 所示。

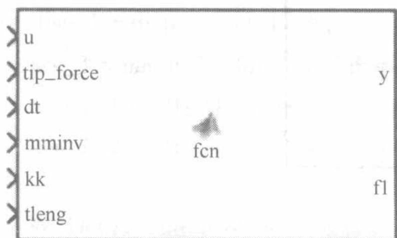


图 A. 1　Simulink 中有限差分功能模块

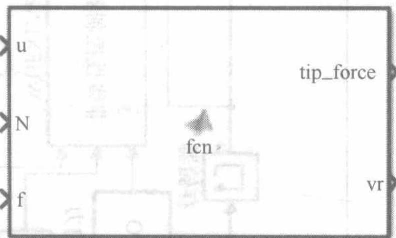


图 A. 2　Simulink 中用于计算倾斜摩擦力的力函数

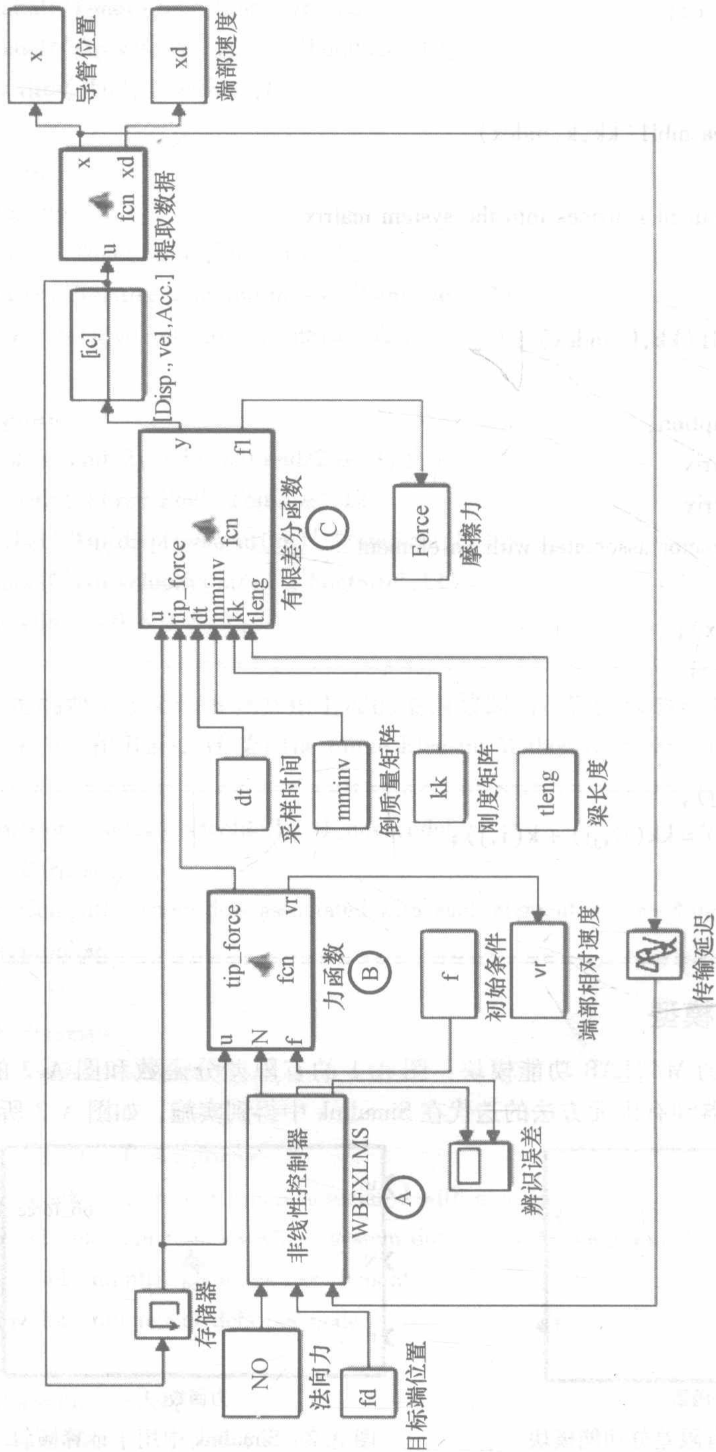


图 A.3 盘式制动器模型的基于小波变换的时频控制方案

```
=====================================================================
function [y,f1] = fcn(u,tip_force,dt,mminv,kk,tleng)
% This function updates the acceleration,velocity,and displacement by finite
% difference method
%
% Variable Description:
% u - acceleration,velocity,and displacement of each node in the finite element
% model
% tip_force - tip frictional force
% dt - time step
% mminv - inverse system mass matrix of the finite element model
% kk - stiffness matrix of the finite element model
% tleng - length of the cantilever beam

% Extract acceleration,velocity,and displacement of the tip
acc = u( :,3);
vel = u( :,2);
disp = u( :,1);

% Assign tip frictional force at current time step
[m,n] = size(u);
tforce = zeros(m,1);
tforce(end-1) = tip_force;
%tforce(1) = -1 * tforce(end-1);
%tforce(2) = tforce(end-1) * tleng;

% Update displacement,velocity and acceleration of
% the tip
vel_1 = vel + acc * dt;
disp_1 = disp + vel_1 * dt;
acc_1 = mminv * (tforce-kk * disp_1); % acc. = (f-kx)/m
acc_1(1) =0; % transverse displ. at node 1 is constrained
acc_1(2) =0; % slope at node 1 is constrained

% Define output of the function block
y = [disp_1 vel_1 acc_1 ];
f1 = tforce(end-1); % tip frictional force
x = disp_1(end-1);
```

```
==========================================================================
    function [tip_force,vr] = fcn(u,N,f)
    %
    % This function calculates the tip frictional force and relative velocity between
    % the tip mass and the disk
    %
    % Variable Description:
    % u - acceleration,velocity,and displacement of each node in the finite element
    % model
    %
    % f - [N0 us um vm vd rm tk vs]
    % N - normal force applied to the tip

    % Extract tip velocity
    % acc = u( :,3);
    vel = u( :,2);
    % disp = u( :,1);

    N0 = f(1); % externally applied normal load
    us = f(2); % the maximum coefficient of static friction
    um = f(3); % the minimum coefficient of kinetic friction
    vm = f(4); % velocity corresponding to um
    vd = f(5); % velocity of the disk
    rm = f(6); % coefficient in eqn. (10.3)
    tk = f(7); % coefficient in arctan
    vs = f(8); % velocity corresponding to us

    % Calculate the relative velocity between the tip mass and the disk
    vr = vd - vel(end-1);
    % tip_force = N*(us*tanh(tk*vr)-3/2*(us-um)*(vr/vm-1/3*(vr/vm)^3));

    % Update the tip frictional force according the relative velocity by eqn. (10.4)
    if abs(vr) < vs
       tip_force = N*(us*vr/vs);
    else
    tip_force = N*tanh(tk*vr)*(us-3/2*(us-um)*((abs(vr)-vs)/(vm-vs)-1/3*(abs
(vr)-vs)/(vm-vs))^3);
    end
==========================================================================
```

A.2　混沌同步

第 11 章中混沌同步的实施也包含一个 m 文件和一个相关的 Simulink 模型。参数和系数的初始化以及小波变换矩阵的构建在下面的主程序中以 m 文件语法得到执行。时频控制器和混沌系统模型建立在 Simulink 中，如下。

A.2.1　主程序

主程序编码成 m 文件，其中 Simulink 系统模型 Hyper_2 被调用。

```
==================================================================
clc; close all; clear all;
% Assign coefficients in the driving system in eqn. (11.1)to(11.3)
beta = 10000;
gamma_y = 0.2;
gamma_z = 0.1;
alpha = 0.2;          % amplitude of the sinusoidal forcing term
omega = 2*pi*769;     % frequency of the sinusoidal forcing term
phase1 = pi/2;        % phase in the sinusoidal forcing term
int1 = [0 0 0];           % initial position of the driving system

% Assign coefficients in the response system in eqn. (11.6)to(11.8)
beta1 = 10000;
gamma_y1 = 0.2;
gamma_z1 = 0.1;
alpha1 = 0.4;                   % amplitude of the sinusoidal forcing term
omega1 = 2*pi*769;              % frequency of the sinusoidal forcing term
phase2 = pi;                    % phase in the sinusoidal forcing term
int2 = [2 2 2];                 % initial position of the response system
%
Total = 4;   % total simulation time
T = 1;   % controller start time
Sampling = 0.0001;   % sampling rate
%
N = 256; % N: filter length
mu1 = 0.2; % step size of the LMS filter
mu2 = 0.2; % step size of the LMS filter
%
```

```
% Construct the matrix of orthogonal WT by eqn. (7.12)
% Daubechies-3(db6) wavelet
% Level 1 decomposition
%
h = [0.3326705530 0.8068915093 0.4598775021 -0.1350110200 -0.0854412739
0.0352262919];
g = [0.0352262919 0.0854412739 -0.1350110200 -0.4598775021 0.8068915093
-0.3326705530];
% Construct wavelet transformation matrix
WT = zeros(N);
for n = 1:N/2
  if 2*n+4-N==4
    WT(n,N-1:N) = h(1:2);
    WT(n,1:4) = h(3:6);
    WT(n+N/2,N-1:N) = g(1:2);
    WT(n+N/2,1:4) = g(3:6);
  elseif 2*n+4-N==2
    WT(n,N-3:N) = h(1:4);
    WT(n,1:2) = h(5:6);
    WT(n+N/2,N-3:N) = g(1:4);
    WT(n+N/2,1:2) = g(5:6);
  else
    WT(n,2*n-1:2*n+4) = h;
    WT(n+N/2,2*n-1:2*n+4) = g;
  end
end
%
sim('Hyper_2'); % start Simulink
%
% Display the simulation result
figure;
plot(x3.time,x3.signals.values);xlabel('Time(sec)','Fontsize',12);
ylabel('x2(v)','Fontsize',12);title('x2','Fontsize',12);
figure;
plot(x3.time,x.signals.valuesx3.signals.values);xlabel('Time(sec)','Fontsize',12);
ylabel('x error(v)','Fontsize',12);title('x-x2','Fontsize',12);
figure;
```

```
plot(y3.time,y3.signals.values);xlabel('Time(sec)','Fontsize',12);
ylabel('y2(v)','Fontsize',12);title('y2','Fontsize',12);
figure;
plot(y3.time,y.signals.values-y3.signals.values);xlabel('Time(sec)','Fontsize',12);
ylabel('y error(v)','Fontsize',12);title('y-y2','Fontsize',12);
figure;
plot(z3.time,z3.signals.values);xlabel('Time(sec)','Fontsize',12);
ylabel('z2(v)','Fontsize',12);title('z2','Fontsize',12);
figure;
plot(z3.time,z.signals.values-z3.signals.values);xlabel('Time(sec)','Fontsize',12);
ylabel('z error(v)','Fontsize',12);title('z-z2','Fontsize',12);
%
a=0; b=0;
for i=1:length(d.time)
a=[a d.time(i,1)];
b=[b d.signals.values(1,1,i)];
end
figure;
plot(a,b);
title('noise')
%
figure;
subplot(2,1,1)
plot(x.time,x.signals.values);xlabel('Time(sec)','Fontsize',12);
ylabel('x(v)','Fontsize',12)
axis([0 4 1.9 3.2])
subplot(2,1,2)
plot(xd.time,xd.signals.values);xlabel('Time(sec)','Fontsize',12);
ylabel('xd(v)','Fontsize',12)
axis([0 4 1.9 3.2])
```

==

A.2.2 Simulink 模型

两个子系统，即驱动系统模型和响应系统模型，建立在 Simulink 中。它们在图 A.4 中明确给出。混沌同步的时频控制方案见图 A.5。那些图和提供的功能模块可以复制到 Simulink 中，以便于图 11.3 指定的主-从非自控混沌系统的同步。

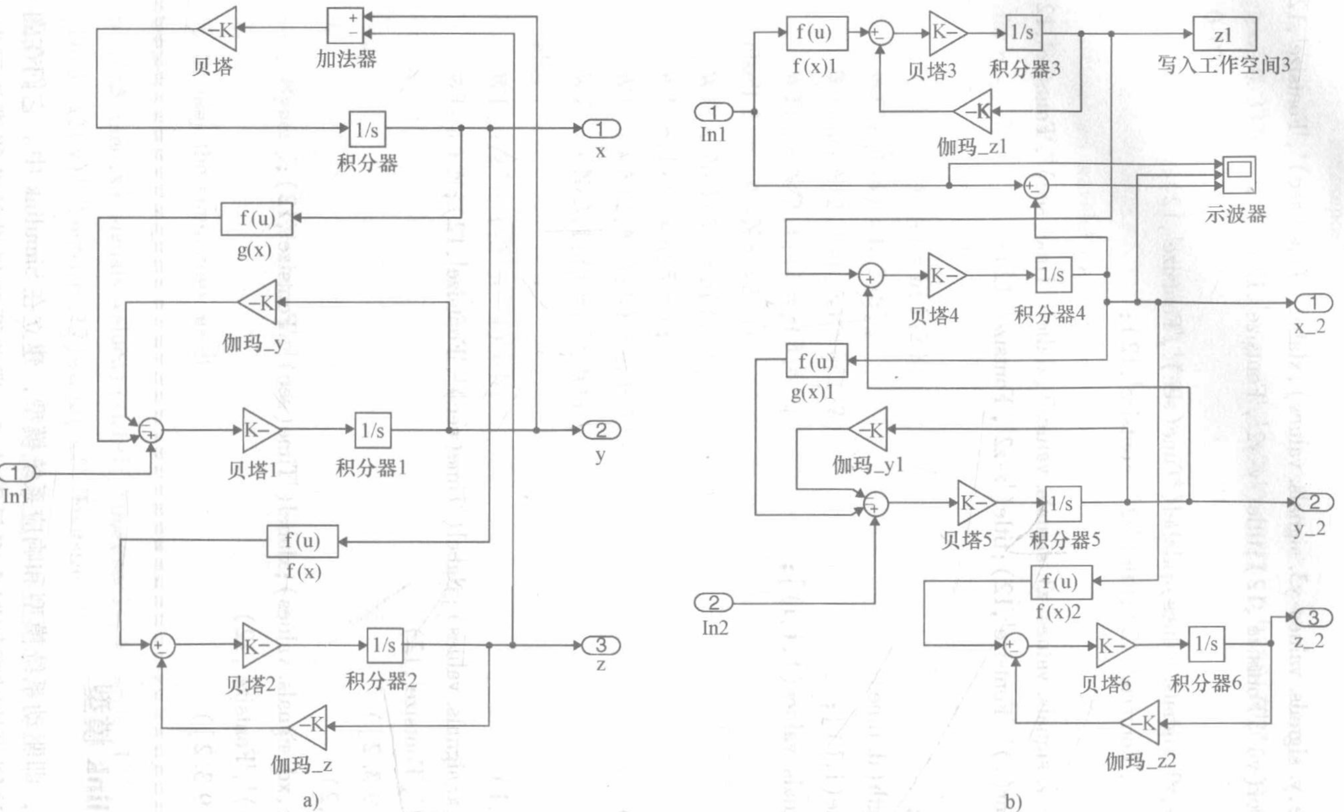


图 A.4

a）驱动系统 b）响应系统

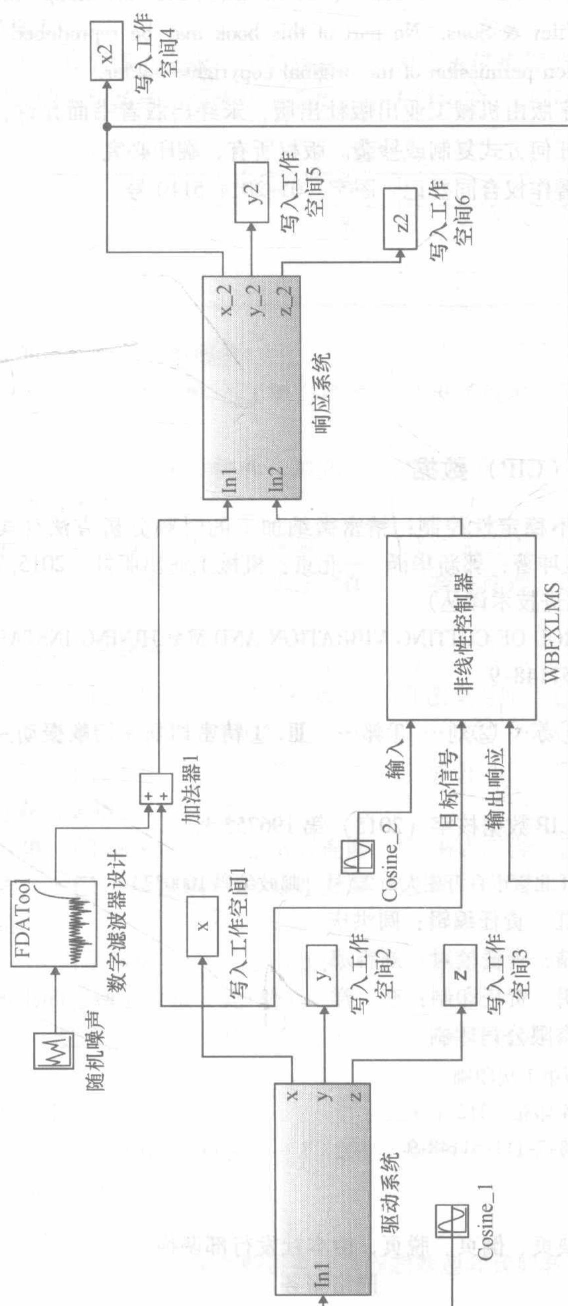


图 A.5　基于小波变换的时频（WBFXLMS）控制器的控制方案

国际视野　科技前沿

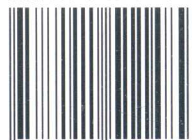
国际电气工程先进技术译丛


机械工业出版社E视界


机械工业出版社微信公众号



WILEY



上架指导　工业技术／机械工程／机械加工

ISBN 978-7-111-51148-9

定价：59.80元